

Exercice 4

1) a) on a $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

on calcule $(-1) : (-3) = \frac{1}{3}$ et $3 : 1 = 3 \neq \frac{1}{3}$

Donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

↳ donc ces points forment un plan !

b) on calcule $\vec{n} \cdot \vec{AB} = -1 \times (-3) + 1 \times 1 + 4 \times (-1) = 3 + 1 - 4 = \boxed{0}$

et $\vec{n} \cdot \vec{AC} = -1 \times (-1) + 1 \times 3 + 4 \times (-1) = 1 + 3 - 4 = \boxed{0}$

Donc le vecteur $\vec{n}$ est bien orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC) → $\vec{n}$ est un vecteur normal à (ABC).

c) Les coordonnées de $\vec{n}$ sont donc les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.

on obtient $-1x + 1y + 4z + d = 0$ soit $-x + y + 4z + d = 0$

or le point A appartient à ce plan (ABC) et on aura :

$-1 + 0 + 4 \times 3 + d = 0$ soit $11 + d = 0$ ou $d = -11$

x_A y_A z_A
et on obtient bien pour (ABC) : $\boxed{-x + y + 4z - 11 = 0}$

2) a) Des vecteurs normaux aux plans (P) et (P') seront respectivement $\vec{n}_P \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_{P'} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en utilisant les équations cartésiennes.

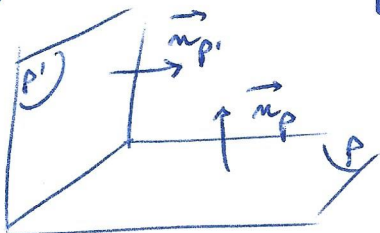
on calcule $3 : 1 = 3$; $(-3) : (-1) = 3$ et $2 : (-1) = -2 \neq 3$

Donc $\vec{n}_P$ et $\vec{n}_{P'}$ ne sont pas colinéaires.

Donc les plans (P) et (P') ne sont pas parallèles.

Donc les plans (P) et (P') sont sécants.

b) on calcule $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_{P'} = 3 \times 1 + (-3) \times (-1) + 2 \times (-1) = 4 \neq 0$



Donc $\vec{n}_P$ et $\vec{n}_{P'}$ ne sont pas orthogonaux.

Donc les plans (P) et (P') ne sont pas perpendiculaires.

3) on va ici résoudre le système $\begin{cases} 3x - 3y + 2z - 9 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$

le principe est de fixer, par exemple, $x = t$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Le système devient $\begin{cases} -3y + 2z = 9 - 3t \\ -y - z = -2 - t \end{cases}$ c'est à dire $\begin{cases} -3y + 2z = 9 - 3t \\ -3y - 3z = -6 - 3t \end{cases}$

(on a multiplié par 3 la 2^e équation)

on soustrait alors les deux égalités de ce système et

on obtient $5z = 15 \rightarrow z = \frac{15}{5} = 3$

et, en remplaçant dans la première égalité, on obtient:

$-3y + 2 \times 3 = 9 - 3t \rightarrow -3y = 3 - 3t \rightarrow y = -1 + t$

Donc on obtient: $\begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = 1 \times t \\ y = -1 + 1 \times t \\ z = 3 + 0 \times t \end{cases}$ qui est bien dirigé par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
C'est la représentation paramétrique de (d)

4) On vérifie, avec (P), que $3 \times 2 - 3 \times 1 + 2 \times 3 - 9 = 6 - 3 + 6 - 9 = 0$
 $x_n \quad y_n \quad z_n$

et, avec (P'), que $2 - 1 - 3 + 2 = 0$
 $x_n \quad y_n \quad z_n$

Donc on a bien $M \in (P)$ et $N \in (P')$.

On en déduit que l'on a $M \in (d)$ et la représentation

paramétrique de (d) sera $\begin{cases} x = 2 + 1 \times t \\ y = 1 + 1 \times t \\ z = 3 + 0 \times t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
point N $\rightarrow$ vecteur directeur $\vec{u}$.

5) on doit vérifier que la représentation paramétrique de (d) vérifie l'équation cartésienne de (ABC) pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On calcule $-(2+t) + (1+t) + 4 \times 3 - 11$
 $= -2 - t + 1 + t + 12 - 11 = 0$

Donc la droite (d) est incluse dans le plan (ABC), sachant que cette droite (d) est déjà la droite d'intersection des plans (P) et (P').

Donc les trois plans (ABC), (P) et (P') sont sécants avec la droite (d) comme droite d'intersection.