

Exercice 3

Partie A 1) Les répétitions sont ici possibles et l'ordre est pris en compte. Il y a donc 64 possibilités pour chacun des 4 caractères, soit $64 \times 64 \times 64 \times 64 = 64^4 = \boxed{16\,777\,216}$ séquences.

2) Les répétitions ne sont plus possibles mais l'ordre est toujours pris en compte. On a donc ici un arrangement de 4 caractères pris parmi 64.

$$\text{On obtient } A_4^{64} = \frac{64!}{(64-4)!} = \frac{64!}{60!} = 64 \times 63 \times 62 \times 61 = \boxed{15\,249\,024} \text{ séquences.}$$

3) a) Le choix pour chacun des 4 caractères se fera ici parmi les 63 possibilités restantes.

$$\text{on obtient: } 63 \times 63 \times 63 \times 63 = 63^4 = \boxed{15\,752\,961} \text{ séquences}$$

b) on cherche ici le "contraire" par rapport à la question a).

$$\text{On obtient: } 16\,777\,216 - 15\,752\,961 = \boxed{1\,024\,255} \text{ séquences}$$

↑
nombre total ↑
pas de lettre A ↑
au moins une lettre A.

c) il y a $\boxed{4}$ possibilités pour placer la lettre A :

$\boxed{A}\square\square\square$ ou $\square\boxed{A}\square\square$ ou $\square\square\boxed{A}\square$ ou $\square\square\square\boxed{A}$

et on veut seulement une fois cette lettre A, donc les trois autres caractères sont à choisir parmi les 63 restants (sachant que, pour ces 63 caractères, la répétition est possible et l'ordre est pris en compte).

$$\text{Cela donne } 4 \times 63 \times 63 \times 63 = \boxed{1\,000\,188} \text{ séquences}$$

d) il y a $\boxed{6}$ possibilités pour placer ces deux lettres A :

$\boxed{AA}\square\square$ ou $\boxed{A}\square\boxed{A}\square$ ou $\boxed{A}\square\square\boxed{A}$ ou $\square\boxed{AA}\square$ ou $\square\boxed{A}\square\boxed{A}$ ou $\square\square\boxed{AA}$

et on doit choisir ensuite les deux autres caractères parmi les 63 caractères restants (comme dans le c)).

$$\text{Cela donne } 6 \times 63 \times 63 = \boxed{23\,814} \text{ séquences}$$

↑
les 6 possibilités
pour placer les
deux lettres A

↑
les possibilités pour les
deux caractères restants

Partie B

1) on a ici $n = 250$ et $p = p(\text{mal transmis}) = 0,01$

2) La variable X correspond au nombre de caractère mal transmis. Sachant que l'on cherche la probabilité qu'ils soient tous bien transmis, on s'intéresse ici à $P(X=0)$.

$$\begin{aligned} \text{On a } P(X=0) &= \binom{250}{0} \times p^0 \times (1-p)^{250-0} \\ &= 1 \times 1 \times 0,99^{250} \approx 0,081. \end{aligned}$$

3) on cherche $P(X > 16)$.

Suivant le modèle de calculatrice utilisé,

$$\text{on utilisera } P(X > 16) = P(X \geq 17)$$

$$\text{ou } P(X > 16) = 1 - P(X \leq 16)$$

$$\text{et on obtient } P(X > 16) \approx \boxed{1,04 \times 10^{-9}}$$

↳ cette probabilité peut être considérée comme négligeable.

Partie C

pour chacune des variables X_i , on aura :

$$E(X_i) = n \times p = 250 \times 0,01 = \boxed{2,5} \text{ caractères mal transmis}$$

$$V(X_i) = n \times p \times (1-p) = 250 \times 0,01 \times 0,99 = \boxed{2,475}$$

Par la linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$$

$$= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4)$$

$$= 4 \times 2,5 = \boxed{10} \text{ caractères mal transmis}$$

Et, puisque les variables sont indépendantes, on a :

$$V(S) = V(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$$

$$= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4)$$

$$= 4 \times 2,475 = \boxed{9,9}$$