

Exercice 2

Partie A 1) $f(10)$ est légèrement inférieur à 0,9 $\rightarrow \boxed{f(10) \approx 0,88}$

2) cela correspond à une asymptote horizontale d'équation $y=1$.

3) on calcule $f(0) = \frac{1}{a+e^{-b \times 0}} = \frac{1}{a+1}$ et on sait que $f(0) = 0,5$
avec le point A $\uparrow$

on résout donc $\frac{1}{a+1} = 0,5 \rightarrow 1 = 0,5a + 0,5 \rightarrow a = \frac{0,5}{0,5} = \boxed{1}$

4) par définition, on aura: $\text{coeff}_{(AB)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0,5}{10 - 0} = \boxed{0,05}$

5) a) avec $a=1$, on peut écrire $f(x) = \frac{1}{1+e^{-bx}}$

$\hookrightarrow$ on applique la formule $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ avec $v(x) = 1+e^{-bx}$
 $v'(x) = -be^{-bx}$

on obtient: $f'(x) = \frac{-(-be^{-bx})}{(1+e^{-bx})^2} = \frac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$

b) La droite (AB) correspond à la tangente à C_f au point A.
Or le coefficient directeur de la tangente en O (au point A!)
est égal au nombre dérivé $f'(0)$.

On a donc $f'(0) = 0,05 \rightarrow \frac{be^{-b \times 0}}{(1+e^{-b \times 0})^2} = 0,05$ avec $e^{-b \times 0} = 1!$

on obtient: $\frac{b}{(1+1)^2} = 0,05 \rightarrow \frac{b}{4} = 0,05 \rightarrow \boxed{b} = 0,05 \times 4 = \boxed{0,2}$

Partie B

1) on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -0,2x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,2x} = 0$

on obtient donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{1}$ $\leftarrow$ limite du type $\frac{1}{1+0}$

2) on peut, par exemple, reprendre le résultat du 5) b)

en remplaçant b par $0,2 \rightarrow f'(x) = \frac{0,2e^{-0,2x}}{(1+e^{-0,2x})^2}$

et, pour tout x , on a $e^{-0,2x} > 0$ et $(1+e^{-0,2x})^2 > 0$

donc on a $f'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

3) f est donc continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
on a $f(0) = \frac{1}{2} = \boxed{0,5}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{1}$

Donc le nombre 0,97 appartient bien à l'intervalle "image" $[0,5; 1]$.
et, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0,97$ a
une unique solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

4) avec la calculatrice, on a $f(17) \approx 0,9677$ et $f(18) \approx 0,9734$
 $\hookrightarrow$ on a donc $\boxed{17 < x < 18}$

Partie c

$$1) \text{ on a } f(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^{0,2x}}} = \frac{1}{\frac{e^{0,2x}+1}{e^{0,2x}}} = \frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x}+1}$$

2) on doit partir d'une certaine intuition.

Une primitive de f sera de la forme $x \rightarrow \ln(1+e^{0,2x})$.
on calcule alors $(\ln(1+e^{0,2x}))' = \frac{0,2e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$ ($\ln u$)' = $\frac{u'}{u}$

et on obtient $f(x)$ au coefficient 0,2 prêt.

Donc une primitive de f sera donnée par la fonction F

$$\boxed{x \rightarrow \frac{1}{0,2} \ln(1+e^{0,2x})}$$

$$3) \text{ on a } I = \frac{1}{40} \int_0^{40} \frac{1}{1+e^{-0,2x}} dx = \frac{1}{40} \int_0^{40} f(x) dx$$

$$\hookrightarrow I = \frac{1}{40} (F(40) - F(0))$$

$$= \frac{1}{40} \left(\frac{1}{0,2} \ln(1+e^{0,2 \times 40}) - \frac{1}{0,2} \ln(1+\underbrace{e^{0,2 \times 0}}_{=1}) \right)$$

$$= \frac{1}{8} \ln(1+e^8) - \frac{1}{8} \ln 2$$

$$= \frac{1}{8} \ln\left(\frac{1+e^8}{2}\right) \approx \boxed{0,913}$$