

Exercice 1

Partie A 1) Le terme V_0 correspond à l'année 2025 et on doit calculer V_1 qui va correspondre à 2026.

(V_n) est une suite géométrique de raison 0,93 $\rightarrow V_{n+1} = 0,93 V_n$

on obtient $V_1 = 0,93 V_0 = 0,93 \times 6 = \boxed{5,58 \text{ milliers}}$

soit $\boxed{5580 \text{ individus}}$

2) on applique la formule des suites géométriques.

$$\hookrightarrow V_n = V_0 \times q^{(n-0)} = 6 \times 0,93^n \rightarrow \boxed{V_n = 6 \times 0,93^n}$$

3) on a $-1 < 0,93 < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,93^n = 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \boxed{0}$

$\hookrightarrow$ à terme, la population se rapprochera de zéro, d'une population nulle.

Partie B

1) on calcule $V_1 = -0,05 V_0^2 + 1,1 V_0$

$$= -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6 = \boxed{4,8 \text{ milliers}} \text{ soit } \boxed{4800 \text{ individus}}$$

2) on calcule $f'(x) = -0,05 \times 2x + 1,1 = -0,1x + 1,1$

or on travaille ici sur l'intervalle $[0; 11]$

$$\hookrightarrow \text{on a } 0 \leq x \leq 11$$

$$\text{soit } 0 \geq -0,1x \geq -1,1$$

$$\text{soit } 1,1 \geq \underbrace{-0,1x + 1,1}_{f'(x)} \geq 0$$

en multipliant les inégalités par $(-0,1)$.

Donc on a $f'(x) \geq 0$ sur $[0; 11]$ $\rightarrow f$ est bien croissante sur $[0; 11]$.

3) initialisation on a $V_0 = 6$ et $V_1 = 4,8$

$$\text{Donc on a bien } 2 \leq V_1 \leq V_0 \leq 6$$

$\hookrightarrow$ la propriété voulue est bien vérifiée au rang 0

Hérédité

on suppose la propriété vraie au rang n , soit $2 \leq V_{n+1} \leq V_n \leq 6$

et montrons qu'elle reste vraie au rang $(n+1)$, soit $2 \leq V_{n+2} \leq V_{n+1} \leq 6$.

$$\text{on part donc de : } 2 \leq V_{n+1} \leq V_n \leq 6$$

$$\text{et on obtient } f(2) \leq f(V_{n+1}) \leq f(V_n) \leq f(6)$$

on a appliqué la fonction f qui est croissante sur $[0; 11]$ et qui conserve l'ordre.

$$\text{soit } 2 \leq V_{n+2} \leq V_{n+1} \leq 4,8 (\leq 6)$$

$\hookrightarrow$ on a bien les inégalités voulues et, d'après le principe de récurrence, on a bien la propriété voulue pour tout n

4) La suite (V_n) est donc décroissante (car $V_{n+1} \leq V_n$) et elle est minorée par 2 (car $V_n \geq 2$) $\rightarrow$ d'après le théorème de la convergence monotone, on sait que (V_n) est convergente.

5) a) on a $V_{n+1} = f(V_n)$ avec f continue et (V_n) convergente.
Le théorème du point fixe nous dit que la limite l de la suite va vérifier l'équation $f(l) = l$ soit $-0,05l^2 + 1,1l = l$
on obtient: $-0,05l^2 + 0,1l = 0 \rightarrow l(-0,05l + 0,1) = 0$
 $\rightarrow l = 0$ ou $-0,05l + 0,1 = 0$
 $l = \frac{-0,1}{-0,05} = 2$

or la limite $l = 0$ est impossible ici car on a $V_n \geq 2$.

Donc la limite de la suite (V_n) sera égale à $\boxed{l = 2}$

b) à terme, la population se rapprochera de $\boxed{2000 \text{ individus}}$

Partie C

1) on cherche à résoudre $6 \times 0,93^n < 3$ soit $0,93^n < 0,5$
c'est à dire $\ln(0,93^n) < \ln(0,5)$ la fonction $\ln$ est croissante et elle conserve l'ordre.
soit $n \times \ln(0,93) < \ln(0,5)$
soit $n > \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,93)} \approx 9,55$
on a divisé par $\ln(0,93)$ qui est négatif $\rightarrow$

on a donc la condition cherchée à partir de la 10^e année,
c'est à dire à partir de $\boxed{2035}$

2) avec la calculatrice, on obtient $V_5 \approx 3,14 (\geq 3)$
et $V_6 \approx 2,96 (\leq 3)$

on a donc la condition cherchée à partir de la 6^e année,
c'est à dire à partir de $\boxed{2031}$

3) La suite (U_n) converge vers 0 et la suite (V_n) converge vers 2
(en étant supérieure à 2 car on a $V_n \geq 2$ pour tout n).
On aura forcément $U_n \leq V_n$ à partir d'un certain rang.

4) a) on complète avec: while $v < u$
 $u = 0,93 * u$
 $v = -0,05 * v * v + 1,1 * v$

b) en affichant les deux suites sur la calculatrice,
on constate que $U_{12} > V_{12}$ et que $U_{13} < V_{13}$

$\rightarrow$ à partir du rang 13 et l'année affichée est $\boxed{2038}$