

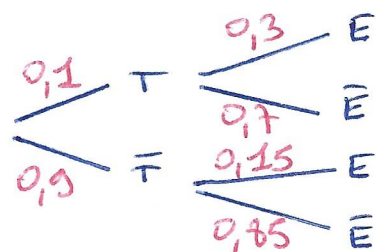
Bac Spé Maths 2025
Voici la correction complète
du jour 1
pour le sujet Centres Etrangers
Jeudi 12 Juin 2025

Correction proposée par
Bruno Swiners
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A

1) on a l'arbre suivant



et on calcule $p(\bar{T} \cap E) = p(\bar{T}) \times p_{\bar{T}}(E)$

$$= 0,9 \times 0,15 = \boxed{0,135}$$

2) avec la formule des probabilités totales, on a :

$$p(E) = p(T \cap E) + p(\bar{T} \cap E)$$

$$= 0,1 \times 0,3 + 0,135 = \boxed{0,165}$$

$$3) \text{ on calcule } p_E(T) = \frac{p(E \cap T)}{p(E)} = \frac{0,1 \times 0,3}{0,165} \approx \boxed{0,18}$$

Partie B 1) on a ici $n = \boxed{15}$ et $p = p(E) = \boxed{0,165}$

2) avec la calculatrice, on a $p(X=5) \approx \boxed{0,06}$

3) on cherche $p(X \geq 1) \rightarrow$ avec la NONWORKS, on peut directement utiliser sa calculatrice ou sinon il faut utiliser l'égalité $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$.

$$\text{on obtient } p(X \geq 1) \approx \boxed{0,93}$$

4) on cherche maintenant n pour que $p(X \geq 1) \geq 0,99$.
on utilise $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$ et on résout l'inéquation.

$$1 - p(X=0) \geq 0,99$$

$$\text{soit } p(X=0) \leq 0,01$$

$$\text{c'est à dire } \binom{n}{0} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^{n-0} \leq 0,01$$

$$\text{on obtient } 0,835^n \leq 0,01$$

$$\text{soit } \ln 0,835^n \leq \ln 0,01$$

$$\text{soit } n \times \ln 0,835 \leq \ln 0,01$$

$$\text{soit } n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,835} \approx 25,54$$

on a divisé par $\ln 0,835$ qui est négatif

La fonction $\ln$ est croissante et elle conserve l'ordre.

Donc, on a la condition voulue à partir de 26 contrôles.

Partie C 1) on a $E(X_1) = n \times p = 20 \times 0,165 = \boxed{3,3 \text{ euros}}$

et on a $V(X_1) = n \times p \times (1-p) = 20 \times 0,165 \times 0,835 = \boxed{2,7555}$

Et on aura la même espérance et la même variance pour X_2 et X_3 .

2) par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E(S) &= E(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \times 3,3 = \boxed{9,9 \text{ euros}} \end{aligned}$$

et puisque les variables sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} V(S) &= V(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3 \times 2,7555 = \boxed{8,2665} \end{aligned}$$

3) on va utiliser ici le fait que 10 (la valeur de $E(S)$) se trouve "au milieu" entre les valeurs 6 et 14.

↳ on veut calculer ici $P(|S - 10| < 4)$

et on sait, avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev :

$$P(|S - \underbrace{E(S)}_{=10}| \geq 4) \leq \frac{V(S)}{4^2}$$

$$\text{soit } P(|S - 10| \geq 4) \leq \frac{8,2665}{16}$$

$$\text{soit } - P(|S - 10| \geq 4) \geq - \frac{8,2665}{16} \quad (\text{inversion de l'inégalité})$$

$$\text{soit } 1 - P(|S - 10| \geq 4) \geq 1 - \frac{8,2665}{16}$$

$$\text{et puisque } P(|S - 10| < 4) = 1 - P(|S - 10| \geq 4)$$

$$\text{on obtient } P(|S - 10| < 4) \geq \boxed{1 - \frac{8,2665}{16}} \geq 0,48$$

$\approx 0,4833$

$$\text{et donc, on a bien } \boxed{P(|S - 10| < 4) \geq 0,48}$$

Exercice 2 Les réponses de ce QCM sont

$$1 \rightarrow a$$

$$2 \rightarrow d$$

$$3 \rightarrow b$$

$$4 \rightarrow b$$

et on va donner quelques explications même si ce n'est pas demandé dans ce type de QCM.

Question 1 Les vecteurs directeurs des droites sont :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ 5 - 1 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{d} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \leftarrow \text{on utilise la représentation paramétrique.}$$

on calcule $3:4 = 0,75$ et $0:4 = 0 \neq 0,75$

Donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{d}$ ne sont pas colinéaires
et les droites (AB) et (d) ne sont pas parallèles.

De plus, on calcule $\vec{AB} \cdot \vec{d} = 4 \times 3 + 4 \times 0 + (-2) \times (-5) = 22 \neq 0$
et les droites (AB) et (d) ne peuvent pas être perpendiculaires.

De plus, une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = -3 + 4t' \\ y = 1 + 4t' \\ z = 4 + (-2)t' \end{cases}$
et on s'intéresse à l'intersection
entre les droites (AB) et (d) .
point A $\vec{AB}$

$$\rightarrow \text{on résout } \begin{cases} -3 + 4t' = -6 + 3t \rightarrow t = 1 \\ 1 + 4t' = 1 \rightarrow t' = 0 \\ 4 - 2t' = 9 - 5t \rightarrow t = 1 \end{cases} \rightarrow \text{on obtient bien la même valeur de } t.$$

Donc il existe bien un point d'intersection $\rightarrow$ réponse a)

Question 2

$$\text{on a } \vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et un vecteur normal à } P \text{ sera } \vec{n}_P \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

on utilise l'équation cartésienne de (P)

$$\text{Donc on a } \vec{AB} = \vec{n}_P.$$

La droite (AB) est donc orthogonale au plan (P) .
cela exclut automatiquement les réponses a), b) et c)
et la réponse d) est bien la seule possible.

Question 3 : on s'intéresse aux vecteurs normaux des plans (P) et (P').

↳ on a $\vec{n}_P \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_{P'} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ ← ces 2 vecteurs sont obtenus avec les équations cartésiennes !

on a $2:4 = 0,5$ et $1:4 = 0,25 \neq 0,5$

Donc les vecteurs $\vec{n}_P$ et $\vec{n}_{P'}$ ne sont pas colinéaires.

Donc les plans ne sont pas parallèles et ne sont pas confondus.

Par contre, on a $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_{P'} = 4 \times 2 + 4 \times 1 + (-2) \times 6 = 8 + 4 - 12 = 0$

Donc on a $\vec{n}_P \perp \vec{n}_{P'}$ et les plans sont perpendiculaires
→ réponse b.

Question 4

on a $\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et on a donc $AB = \sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6$

on a $\vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et on a donc $AC = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$

on calcule alors $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = 4 \times 3 + 4 \times 0 + (-2) \times (-5) = 22$

et on sait que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
 $(=6) \quad (= \sqrt{34})$

on en déduit $6 \times \sqrt{34} \times \cos(\widehat{BAC}) = 22$

soit $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{22}{6\sqrt{34}}$

et $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{22}{6\sqrt{34}}\right) \approx 51^\circ$

→ réponse b

Exercice 3

Partie A 1) on a $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty$

et, avec $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{25} = \frac{1}{25}$, on obtient (par soustraction) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \boxed{-\infty}$

2) on a $f(x) = 4 \ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$

$$\hookrightarrow f'(x) = 4 \times \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{25} = \frac{4 \times 25 - 2x(x+1)}{25(x+1)} = \frac{100 - 2x^2 - 2x}{25(x+1)}$$

3) sur $] -1; +\infty[$, on a $(x+1) > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe du trinôme $(-2x^2 - 2x + 100)$.

on calcule $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 100 = 804 > 0 \rightarrow$ il y a 2 racines.

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{804}}{-4} \approx 6,6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{804}}{-4} \approx -7,6$$

$\hookrightarrow x_2 \notin] -1; +\infty[$

on obtient donc le tableau suivant

x	-1	2	6,5	x_1	$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	-	
variations de f					

signe d'un trinôme avec une valeur de Δ négative.

on constate que l'intervalle $[2; 6,5]$ est inclus dans $] -1; x_1]$

et la fonction f est bien croissante sur $[2; 6,5]$.

4) on a $h(2) = f(2) - 2 \approx 2,23$

et $h(6,5) = f(6,5) - 6,5 \approx -0,7$

Donc l'équation $h(x) = 0$ ne peut pas avoir de solution sur $[2; m]$ (la fonction est strictement positive sur $[2; m]$).

Par contre, la fonction h est continue et décroissante sur $[m; 6,5]$

et on a $h(m) = m \approx 2,265 > 0$

et $h(6,5) \approx -0,7 < 0$

Donc le nombre 0 appartient bien à l'intervalle $[h(6,5); h(m)]$

et d'après le corollaire du TVI, l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique sur l'intervalle $[m; 6,5]$.

5) a) la commande bises (2) nous donnera un intervalle d'amplitude 10^{-2} centré sur la solution α de l'équation $h(x) = 0 \rightarrow$ on obtient ici $\boxed{(6,36; 6,37)}$

b) cela signifie que la solution α est comprise entre 6,36 et 6,37.

Partie B

1) on a $U_0 = 2$ et $U_1 = f(U_0) = f(2) = 4 \ln(3) - \frac{2^2}{25} \approx 4,23$

initialisation on a bien $2 \leq U_0 \leq U_1 \leq 6,5$

et on a bien la propriété voulue au rang 0.

hérédité on suppose la propriété vraie au rang n
et on veut montrer qu'elle reste vraie au rang $(n+1)$.

↳ on suppose $2 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 6,5$

on obtient $f(2) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(6,5)$

on applique la fonction f croissante sur $[2; 6,5]$
qui va donc conserver l'ordre.

et finalement on obtient

$$(2 \leq) f(2) \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq f(6,5) (\leq 6,5)$$

$\approx 4,23$ $\approx 5,8$

soit $2 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 6,5$

↳ d'après le principe de récurrence, on a bien la propriété voulue pour tout n .

2) La suite (U_n) est croissante (car $U_n \leq U_{n+1}$) et elle est majorée (car $U_n \leq 6,5$). D'après le théorème de la convergence monotone, on sait que (U_n) est convergente.

3) on a $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f continue sur $[2; 6,5]$.

D'après le théorème du point fixe, la limite de (U_n) , notée l , va vérifier l'équation $l = f(l)$

c'est à dire $f(l) - l = 0$ ou $h(l) = 0$.

Le nombre α étant l'unique solution de l'équation

$h(x) = 0$ sur $[2; 6,5]$, on aura forcément $\boxed{l = \alpha}$

Exercice 4

Partie A 1) La fonction h est constante donc on a $h'(t) = 0$.
et on a bien $h'(t) + 0,48 h(t) = 0 + 0,48 \times \frac{1}{250} = \frac{1}{120}$
 $\rightarrow h$ est bien une solution (particulière) de (E_1) .

2) on résout $y' + 0,48y = 0 \rightarrow y' = -0,48y$.
on applique le cours et les solutions de cette équation
sont de la forme : $t \rightarrow K e^{-0,48t}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

3) L'ensemble des solutions de (E_1) est donné par la somme
d'une solution particulière de (E_1) avec la solution générale
de l'équation homogène résolue dans la question 2.

On obtient : $\boxed{t \rightarrow K e^{-0,48t} + \frac{1}{120}}$, avec $K \in \mathbb{R}$

Partie B

1) on a $p(t) = \frac{1}{y(t)}$ et on a donc $p'(t) = \frac{-y'(t)}{y^2(t)}$.

Si p est solution de (E_2) alors on a $p'(t) = \frac{1}{250} p(t) (120 - p(t))$

c'est à dire $\frac{-y'(t)}{y^2(t)} = \frac{1}{250} \times \frac{1}{y(t)} \left(120 - \frac{1}{y(t)} \right)$

on obtient $-y'(t) = \frac{1}{250} \times \frac{y'(t)}{y(t)} \left(120 - \frac{1}{y(t)} \right)$
on simplifie.

et, en développant, on a : $-y'(t) = \frac{120}{250} y(t) - \frac{1}{250} y(t) \times \frac{1}{y(t)}$
 $= 0,48$

soit $-y'(t) = 0,48 y(t) - \frac{1}{250}$

on $y'(t) + 0,48 y(t) = \frac{1}{250}$

et on a bien y qui est solution de (E_1) .

2) on considère une solution y strictement positive de (E_1) .

on sait que $y(t) = K_1 e^{-0,48t} + \frac{1}{120}$ (d'après la partie A)

$\rightarrow$ avec K_1 réel positif par exemple

et on a $p(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{K_1 e^{-0,48t} + \frac{1}{120}} = \frac{120}{120 K_1 e^{-0,48t} + 1}$
on note K cette "nouvelle" constante

↳ on obtient bien l'expression souhaitée

3) La condition initiale nous donne $p(0) = 30$.

on veut donc $p(0) = \frac{120}{1 + K \underbrace{e^{-0,48 \times 0}}_{=1}} = \frac{120}{1 + K} = 30$

on obtient $120 = 30(1 + K)$ soit $120 = 30 + 30K$
 soit $K = \frac{90}{30} = \boxed{3}$

4) on a donc $p(t) = \frac{120}{1 + 3e^{-0,48t}}$

avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,48t = -\infty$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,48t} = 0$

on a donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 120$ (limite du type $\frac{120}{1+0}$ ou $\frac{120}{1}$)

Donc, à terme, la population de bactéries se stabilisera et se rapprochera de 120 000 bactéries.

5) on cherche donc à résoudre $p(t) > 60$

soit $\frac{120}{1 + 3e^{-0,48t}} > 60$

soit $\frac{120}{60} > 1 + 3e^{-0,48t}$

on obtient donc: $e^{-0,48t} < \frac{2-1}{3} \rightarrow e^{-0,48t} < \frac{1}{3}$

or la fonction $\ln$ est croissante et elle conserve l'ordre.

on a donc: $\ln e^{-0,48t} < \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ avec $\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$

c'est à dire $-0,48t < -\ln 3$

et on obtient

$t > \frac{-\ln 3}{-0,48}$
on a divisé par -0,48 qui est négatif

attention, ce résultat est en heure et on le multiplie par 60 pour l'avoir en minutes.

on obtient $t > 137(\text{min})$

ou $t > 2\text{h } 17\text{min}$.