

Exercice 4

Partie A 1) La fonction h est constante donc on a $h'(t) = 0$.
et on a bien $h'(t) + 0,48 h(t) = 0 + 0,48 \times \frac{1}{250} = \frac{1}{120}$
 $\rightarrow h$ est bien une solution (particulière) de (E_1) .

2) on résout $y' + 0,48 y = 0 \rightarrow y' = -0,48 y$.
on applique le cours et les solutions de cette équation
sont de la forme : $t \rightarrow K e^{-0,48 t}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

3) L'ensemble des solutions de (E_1) est donné par la somme
d'une solution particulière de (E_1) avec la solution générale
de l'équation homogène résolue dans la question 2.

On obtient : $\boxed{t \rightarrow K e^{-0,48 t} + \frac{1}{120}}$, avec $K \in \mathbb{R}$

Partie B

1) on a $p(t) = \frac{1}{y(t)}$ et on a donc $p'(t) = \frac{-y'(t)}{y^2(t)}$.

Si p est solution de (E_2) alors on a $p'(t) = \frac{1}{250} p(t) (120 - p(t))$

c'est à dire $\frac{-y'(t)}{y^2(t)} = \frac{1}{250} \times \frac{1}{y(t)} \left(120 - \frac{1}{y(t)} \right)$

on obtient $-y'(t) = \frac{1}{250} \times \frac{y'(t)}{y(t)} \left(120 - \frac{1}{y(t)} \right)$
on simplifie.

et, en développant, on a : $-y'(t) = \frac{120}{250} y(t) - \frac{1}{250} y(t) \times \frac{1}{y(t)}$
 $= 0,48$

soit $-y'(t) = 0,48 y(t) - \frac{1}{250}$

on $y'(t) + 0,48 y(t) = \frac{1}{250}$

et on a bien y qui est solution de (E_1) .

2) on considère une solution y strictement positive de (E_1) .

on sait que $y(t) = K_1 e^{-0,48 t} + \frac{1}{120}$ (d'après la partie A)

$\rightarrow$ avec K_1 réel positif par exemple

et on a $p(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{K_1 e^{-0,48t} + \frac{1}{120}} = \frac{120}{120 K_1 e^{-0,48t} + 1}$
on note K cette "nouvelle" constante

↳ on obtient bien l'expression souhaitée

3) La condition initiale nous donne $p(0) = 30$.

on veut donc $p(0) = \frac{120}{1 + K e^{-0,48 \times 0}} = \frac{120}{1 + K} = 30$
= 1

on obtient $120 = 30(1 + K)$ soit $120 = 30 + 30K$
 soit $K = \frac{90}{30} = \boxed{3}$

4) on a donc $p(t) = \frac{120}{1 + 3e^{-0,48t}}$

avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,48t = -\infty$ et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,48t} = 0$

on a donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 120$ (limite du type $\frac{120}{1+0}$ ou $\frac{120}{1}$)

Donc, à terme, la population de bactéries se stabilisera et se rapprochera de 120 000 bactéries.

5) on cherche donc à résoudre $p(t) > 60$

soit $\frac{120}{1 + 3e^{-0,48t}} > 60$

soit $\frac{120}{60} > 1 + 3e^{-0,48t}$

on obtient donc: $e^{-0,48t} < \frac{2-1}{3} \rightarrow e^{-0,48t} < \frac{1}{3}$

or la fonction $\ln$ est croissante et elle conserve l'ordre.

on a donc: $\ln e^{-0,48t} < \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ avec $\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$

c'est à dire $-0,48t < -\ln 3$

et on obtient

$t > \frac{-\ln 3}{-0,48}$
on a divisé par -0,48 qui est négatif

attention, ce résultat est en heure et on le multiplie par 60 pour l'avoir en minutes.

on obtient $t > 137(\text{min})$

ou $t > 2\text{h } 17\text{min}$.