

Exercice 3

Partie A 1) on a $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty$

et, avec $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{25} = \frac{1}{25}$, on obtient (par soustraction) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \boxed{-\infty}$

2) on a $f(x) = 4 \ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$

$$\hookrightarrow f'(x) = 4 \times \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{25} = \frac{4 \times 25 - 2x(x+1)}{25(x+1)} = \frac{100 - 2x^2 - 2x}{25(x+1)}$$

3) sur $] -1; +\infty[$, on a $(x+1) > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe du trinôme $(-2x^2 - 2x + 100)$.

on calcule $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 100 = 804 > 0 \rightarrow$ il y a 2 racines.

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{804}}{-4} \approx 6,6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{804}}{-4} \approx -7,6$$

$\hookrightarrow x_2 \notin] -1; +\infty[$

on obtient donc le tableau suivant

x	-1	2	6,5	x_1	$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	-	
variations de f		↗		↘	

signe d'un trinôme avec une valeur de Δ négative.

on constate que l'intervalle $[2; 6,5]$ est inclus dans $] -1; x_1]$

et la fonction f est bien croissante sur $[2; 6,5]$.

4) on a $h(2) = f(2) - 2 \approx 2,23$

et $h(6,5) = f(6,5) - 6,5 \approx -0,7$

Donc l'équation $h(x) = 0$ ne peut pas avoir de solution

sur $[2; m]$ (la fonction est strictement positive sur $[2; m]$).

Par contre, la fonction h est continue et décroissante sur $[m; 6,5]$

et on a $h(m) = M \approx 2,265 > 0$

et $h(6,5) \approx -0,7 < 0$

Donc le nombre 0 appartient bien à l'intervalle $[h(6,5); h(m)]$

et d'après le corollaire du TVI, l'équation $h(x) = 0$ a

une solution unique sur l'intervalle $[m; 6,5]$.

5) a) la commande bises (2) nous donnera un intervalle d'amplitude 10^{-2} centré sur la solution α de l'équation $h(x) = 0 \rightarrow$ on obtient ici $\boxed{(6,36; 6,37)}$

b) cela signifie que la solution α est comprise entre 6,36 et 6,37.

Partie B

1) on a $U_0 = 2$ et $U_1 = f(U_0) = f(2) = 4 \ln(3) - \frac{2^2}{25} \approx 4,23$

initialisation on a bien $2 \leq U_0 \leq U_1 \leq 6,5$

et on a bien la propriété voulue au rang 0.

hérédité on suppose la propriété vraie au rang n
et on veut montrer qu'elle reste vraie au rang $(n+1)$.

↳ on suppose $2 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 6,5$

on obtient $f(2) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(6,5)$

on applique la fonction f croissante sur $[2; 6,5]$
qui va donc conserver l'ordre.

et finalement on obtient

$$(2 \leq) f(2) \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq f(6,5) (\leq 6,5)$$

$\approx 4,23$ $\approx 5,8$

soit $2 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 6,5$

↳ d'après le principe de récurrence, on a bien la propriété voulue pour tout n .

2) La suite (U_n) est croissante (car $U_n \leq U_{n+1}$) et elle est majorée (car $U_n \leq 6,5$). D'après le théorème de la convergence monotone, on sait que (U_n) est convergente.

3) on a $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f continue sur $[2; 6,5]$.

D'après le théorème du point fixe, la limite de (U_n) , notée l , va vérifier l'équation $l = f(l)$

c'est à dire $f(l) - l = 0$ ou $h(l) = 0$.

Le nombre α étant l'unique solution de l'équation

$h(x) = 0$ sur $[2; 6,5]$, on aura forcément $\boxed{l = \alpha}$