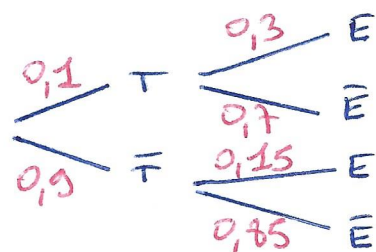


Exercice 1

Partie A

1) on a l'arbre suivant



et on calcule $p(\bar{T} \cap E) = p(\bar{T}) \times p_{\bar{T}}(E)$

$$= 0,9 \times 0,15 = \boxed{0,135}$$

2) avec la formule des probabilités totales, on a:

$$p(E) = p(T \cap E) + p(\bar{T} \cap E)$$

$$= 0,1 \times 0,3 + 0,135 = \boxed{0,165}$$

3) on calcule $p_E(T) = \frac{p(E \cap T)}{p(E)} = \frac{0,1 \times 0,3}{0,165} \approx \boxed{0,18}$

Partie B 1) on a ici $n = \boxed{15}$ et $p = p(E) = \boxed{0,165}$

2) avec la calculatrice, on a $p(X=5) \approx \boxed{0,06}$

3) on cherche $p(X \geq 1) \rightarrow$ avec la NONWORKS, on peut directement utiliser sa calculatrice ou sinon il faut utiliser l'égalité $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$.

$$\text{on obtient } p(X \geq 1) \approx \boxed{0,93}$$

4) on cherche maintenant n pour que $p(X \geq 1) \geq 0,99$.
on utilise $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$ et on résout l'inéquation.

$$1 - p(X=0) \geq 0,99$$

$$\text{soit } p(X=0) \leq 0,01$$

$$\text{c'est à dire } \binom{n}{0} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^{n-0} \leq 0,01$$

$$\text{on obtient } 0,835^n \leq 0,01$$

$$\text{soit } \ln 0,835^n \leq \ln 0,01$$

$$\text{soit } n \times \ln 0,835 \leq \ln 0,01$$

$$\text{soit } n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,835} \approx 25,54$$

on a divisé par $\ln 0,835$ qui est négatif

La fonction $\ln$ est croissante et elle conserve l'ordre.

Donc, on a la condition voulue à partir de 26 contrôles.

Partie C 1) on a $E(X_1) = n \times p = 20 \times 0,165 = \boxed{3,3 \text{ euros}}$
et on a $V(X_1) = n \times p \times (1-p) = 20 \times 0,165 \times 0,835 = \boxed{2,7555}$

Et on aura la même espérance et la même variance pour X_2 et X_3 .

2) par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E(S) &= E(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \times 3,3 = \boxed{9,9 \text{ euros}} \end{aligned}$$

et puisque les variables sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} V(S) &= V(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3 \times 2,7555 = \boxed{8,2665} \end{aligned}$$

3) on va utiliser ici le fait que 10 (la valeur de $E(S)$) se trouve "au milieu" entre les valeurs 6 et 14.

↳ on veut calculer ici $P(|S - 10| < 4)$

et on sait, avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev :

$$P(|S - \underbrace{E(S)}_{=10}| \geq 4) \leq \frac{V(S)}{4^2}$$

$$\text{soit } P(|S - 10| \geq 4) \leq \frac{8,2665}{16}$$

$$\text{soit } - P(|S - 10| \geq 4) \geq - \frac{8,2665}{16} \quad (\text{inversion de l'inégalité})$$

$$\text{soit } 1 - P(|S - 10| \geq 4) \geq 1 - \frac{8,2665}{16}$$

$$\text{et puisque } P(|S - 10| < 4) = 1 - P(|S - 10| \geq 4)$$

$$\text{on obtient } P(|S - 10| < 4) \geq \boxed{1 - \frac{8,2665}{16}} \geq 0,48$$

$\approx 0,4833$

$$\text{et donc, on a bien } \boxed{P(|S - 10| < 4) \geq 0,48}$$