Bac Spé Maths 2025

Voici la correction complète

du jour 2

pour le sujet Asie Pacifique

Jeudi 12 Juin 2025

Correction proposée par

Bruno Swiners

www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

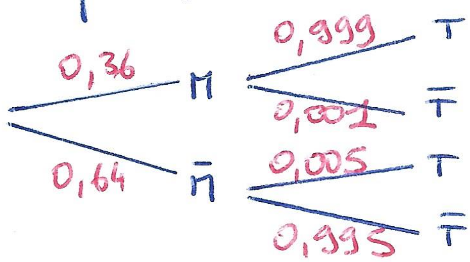
Partie A

1) on nous donne $p_M(T) = \boxed{0,999}$ et $p_{\bar{M}}(T) = \boxed{0,005}$

2) avec les données, on calcule $p(M) = \dfrac{270\,000}{750\,000}$ ← nombre de personnes infectées ← population totale

$\hookrightarrow p(M) = \boxed{0,36}$

3) on en déduit l'arbre pondéré suivant



4) on calcule $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0,36 \times 0,999 = \boxed{0,360}$

5) on utilise la formule des probabilités totales :

$$p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T)$$
$$= 0,360 + 0,64 \times 0,005 = \boxed{0,363}$$

6) on obtient $p_T(M) = \dfrac{p(T \cap M)}{p(T)} = \dfrac{0,360}{0,363} \approx \boxed{0,992}$

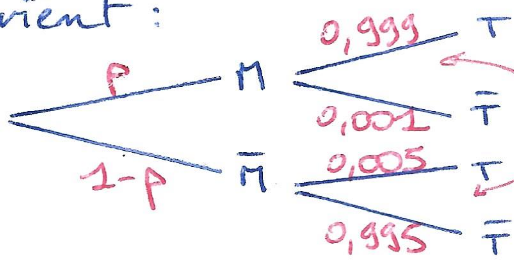
7) L'énoncé nous indique que le test est fiable si on a $p_T(M) > 0,95$ → ce qui est bien le cas ici !!

Partie B

1) on ne connait pas la valeur de $p(M)$

$\longrightarrow p(M) = p$ et $p(\bar{M}) = 1 - p(M) = 1 - p$.

L'arbre pondéré devient :



toutes les probabilités conditionnelles sont inchangées ici

2) on utilise à nouveau la formule des probabilités totales :

$$p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T)$$
$$= p \times 0,999 + (1-p) \times 0,005$$
$$= 0,999p + 0,005 - 0,005p$$
$$= \boxed{0,994p + 0,005}$$

3) on a $p_T(M) = \dfrac{p(T \cap M)}{p(T)} = \dfrac{0,999p}{0,994p + 0,005} = \dfrac{999p}{994p + 5}$

on "multiplie la fraction" par 1000.

4) on veut $p_T(M) > 0,95$ soit $\dfrac{999p}{994p+5} > 0,95$

↳ on obtient $999p > 0,95(994p+5)$

soit $999p > 944,3p + 4,75$ soit $p > \underbrace{\dfrac{4,75}{54,7}}_{\approx 0,0868}$

Donc le test sera considéré fiable dès que $\boxed{p > 0,087}$

Partie C

on cherche n tel que $p(X \geq 1) > 0,99$

or on a $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$

$$= 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times \underbrace{(1-p)^{n-0}}_{=(1-0,36)^n}$$

$$= 1 - (0,64)^n.$$

L'inéquation devient alors :

$$1-(0,64)^n > 0,99$$

soit $(0,64)^n < 0,01$

soit $\ln(0,64)^n < \ln(0,01)$ on applique la fonction ln qui est croissante et qui conserve l'ordre.

on obtient : $n \times \ln(0,64) < \ln(0,01)$

soit $n > \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,64)} \approx 10,32$

on a divisé par ln(0,64) qui est négatif

Donc on aura le résultat souhaité à partir d'un échantillon de 11 individus.

Exercice 2

Partie A 1) on a $V_1 = \frac{1}{2}V_0 + 10 = \frac{1}{2} \times 30 + 10 = \boxed{25}$

et $U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 10 = \frac{1}{2} \times 25 + 10 = \boxed{22,5}$

2) on sait que $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 10$ et $V_n = U_n - 20$

soit $U_n = V_n + 20$

Donc on a $V_{n+1} = U_{n+1} - 20$

$= \frac{1}{2}U_n + 10 - 20$

$= \frac{1}{2}(V_n + 20) + 10 - 20 = \frac{1}{2}V_n + \underbrace{\frac{1}{2} \times 20 + 10 - 20}_{0}$

on obtient donc $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$ → (V_n) est une suite géométrique de raison $\boxed{\frac{1}{2}}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 20 = 30 - 20 = \boxed{10}$

3) on applique la formule des suites géométriques

$V_n = V_0 \times q^{n-0} = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4) on sait que $U_n = V_n + 20$ → $\boxed{U_n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 20}$

5) on a $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \boxed{20}$.

Partie B

1) on calcule $w_1 = \frac{1}{2}w_0 + \frac{1}{2}U_0 + 7$

$= \frac{1}{2} \times 45 + \frac{1}{2} \times 30 + 7$ → $\boxed{w_1 = 44,5}$

2) il faut intervertir les lignes 5 et 6 du script afin de ne pas calculer le terme "suivant" U_1 de la suite (U_n) avant d'avoir calculer le terme w_1 qui se calcule à partir de w_0 et de U_0.

3) a) initialisation

on a $w_0 = 45$

et on vérifie que $w_0 = 10 \times 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 34 = 45$.

→ la propriété voulue est bien vérifiée au rang 0.

Hérédité

on suppose la propriété vraie pour n, soit $w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$
et on veut vérifier qu'elle reste vraie pour le rang $n+1$, c'est à dire
que l'on veut vérifier l'égalité $w_{n+1} = 10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$.

On a $w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n + \frac{1}{2} v_n + 7$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{10n\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 11\left(\tfrac{1}{2}\right)^n + 34}_{\text{c'est bien le } w_n \text{ de l'hypothèse de récurrence}}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\underbrace{20 + 10\left(\tfrac{1}{2}\right)^n}_{\text{c'est le } v_n \text{ obtenu dans la partie A.}}\Big) + 7$$

on obtient $w_{n+1} = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 17 + 10 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 7$

(on a développé en tenant compte de $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$)

et on a $w_{n+1} = (10n+10)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$

soit $w_{n+1} = 10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$

↳ on a bien l'égalité cherchée et d'après le principe de récurrence, la propriété voulue est bien vraie pour tout n.

b) On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{10}{n} = 0$

et, en appliquant le théorème des gendarmes avec l'encadrement donné par l'énoncé, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

De plus, on a $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

On en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} 11\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

et on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \boxed{34}$

↳ la suite (w_n) est $\boxed{\text{convergente}}$ avec une limite égale à $\boxed{34}$.

Exercice 3

on utilise la représentation paramétrique de la droite (d)

Affirmation 1

On prend un vecteur directeur de (d) avec $\vec{v_d}\begin{pmatrix}1/3\\1/2\\1\end{pmatrix}$

et un vecteur normal au plan (P) avec $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$

on utilise l'équation cartésienne de (P)

On constate que $\vec{n} = 6\vec{v_d}$ et on a donc des vecteurs colinéaires.

Donc la droite (d) est bien orthogonale au plan (P).

On vérifie maintenant que l'on a bien $H \in (d)$.

↳ on cherche t tel que $\begin{cases} -8+\frac{1}{3}t = -6 \rightarrow \frac{1}{3}t = 2 \rightarrow t=6 \\ -1+\frac{1}{2}t = 2 \rightarrow \frac{1}{2}t = 3 \rightarrow t=6 \\ -4+t = 2 \rightarrow t=6 \end{cases}$

on obtient bien une même valeur $\boxed{t=6}$ → on a $H \in (d)$.

et il nous reste à vérifier que l'on a bien $H \in (P)$.

↳ on calcule $2\times\underset{x_H}{(-6)} + 3\times\underset{y_H}{(-2)} + 6\times\underset{z_H}{2} - 6 = 0$

Donc on a aussi $H \in (P)$ et l'affirmation est donc $\boxed{\text{VRAIE}}$

Affirmation 2

on calcule $\vec{CD}\begin{pmatrix}0-3\\2-0\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{CH}\begin{pmatrix}-6-3\\2-0\\2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\2\\2\end{pmatrix}$

On en déduit $\vec{CD}\cdot\vec{CH} = \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-9\\2\\2\end{pmatrix} = -3\times(-9)+2\times2+0\times2 = \boxed{31}$

et on calcule $CD = \sqrt{(-3)^2+2^2+0^2} = \sqrt{13}$

$CH = \sqrt{(-9)^2+2^2+2^2} = \sqrt{89}$

or on sait que $\vec{CD}\cdot\vec{CH} = CD \times CH \times \cos(\widehat{DCH})$

soit $31 = \sqrt{13}\times\sqrt{89}\times\cos(\widehat{DCH})$

On a donc $\cos(\widehat{DCH}) = \dfrac{31}{\sqrt{13}\times\sqrt{89}}$

soit $\widehat{DCH} = \cos^{-1}\left(\dfrac{31}{\sqrt{13}\times\sqrt{89}}\right) \approx \boxed{24^\circ} \boxed{\neq} \boxed{17{,}3^\circ}$

→ affirmation $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Affirmation 3

Un vecteur normal au plan (P) sera $\vec{n}_P \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et au plan (P') sera $\vec{n}_{P'} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

on calcule $1 : 2 = 0{,}5$ et $-2 : 3 \neq 0{,}5$.

Les vecteurs normaux ne sont donc pas colinéaires.

Donc les plans ne sont pas parallèles → ils sont donc sécants.

On va vérifier maintenant que la droite Δ est incluse dans chaque plan → on utilise la représentation paramétrique de Δ et les équations cartésiennes des plans (P) et (P').

On a : $2(3-3t) + 3\times 0 + 6\times t - 6 = 6 - 6t + 6t - 6 = \boxed{0}$, pour tout t

et $3 - 3t - 2\times 0 + 3\times t - 3 = 3 - 3t + 3t - 3 = \boxed{0}$, pour tout t.

Donc la droite Δ est bien la droite d'intersection des deux plans (P) et (P') → affirmation $\boxed{\text{VRAIE}}$

Affirmation 4

on calcule $\overrightarrow{HJ} \begin{pmatrix} \frac{-54}{13} - (-6) \\ \frac{62}{13} - 2 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{13} \\ \frac{36}{13} \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 0-3 \\ 2-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

on a donc $\overrightarrow{HJ}\cdot\overrightarrow{CD} = \frac{24}{13}\times(-3) + \frac{36}{13}\times 2 + (-2)\times 0 = \boxed{0}$

et on a bien $\overrightarrow{HJ} \perp \overrightarrow{CD}$.

on doit maintenant vérifier que l'on a bien $H \in (CD)$.

↳ une représentation paramétrique de la droite (CD) sera :

$$\begin{cases} x = \boxed{3} + \boxed{(-3)} \times t = 3 - 3t \\ y = \boxed{0} + \boxed{2} \times t = 2t \\ z = \boxed{0} + \boxed{0} \times t = 0 \end{cases}$$

point C — vecteur $\overrightarrow{CD}$

on cherche une valeur de t tel que $\begin{cases} 3 - 3t = -\frac{54}{13} \\ 2t = \frac{62}{13} \\ 0 = 0 \end{cases}$ (droite (CD) — point H)

et on obtient bien le même paramètre $\boxed{t = \frac{31}{13}}$

et on a bien $J \in (CD)$ avec $\overrightarrow{HJ} \perp \overrightarrow{CD}$ → $\boxed{\text{VRAIE}}$

pour vérifier $H \in (CD)$, on aurait pu aussi vérifier l'alignement des points J, C et D, en vérifiant que les vecteurs $\overrightarrow{JC}$ et $\overrightarrow{JD}$ sont bien colinéaires.

Exercice 4

Partie A

1) on voit que l'on obtient, à nouveau, une ordonnée égale à 40 pour une abscisse égale (environ) à 3,8.

2) on a $f(0) = 40$ soit $(a\times 0 + b)e^{-0,5\times 0} = 40$

soit $b \times 1 = 40 \to \boxed{b = 40}$

3) on aura donc $f'(t) + 0,5\times f(t) = 60\,e^{-0,5t}$

avec $f(t) = (\underbrace{at+40}_{u})\times\underbrace{e^{-0,5t}}_{v}$

et $f'(t) = \underbrace{a}_{u'}\times \underbrace{e^{-0,5t}}_{v} + (\underbrace{at+40}_{u})\times(\underbrace{-0,5e^{-0,5t}}_{v'})$

$= e^{-0,5t}(a - \underbrace{20}_{40\times(-0,5)} - 0,5at)$

on obtient $f'(t) + 0,5 f(t)$

$= e^{-0,5t}(a-20-0,5at) + 0,5\times(at+40)e^{-0,5t}$

$= e^{-0,5t}(a - \cancel{20} - \cancel{0,5at} + \cancel{0,5at} + \cancel{20}) = ae^{-0,5t}$

et, pour avoir $f'(t) + 0,5 f(t) = 60e^{-0,5t}$, il faut $\boxed{a = 60}$.

Partie B

1) on a $f(t) = (\underbrace{60t+40}_{u})\times\underbrace{e^{-0,5t}}_{v}$

et on peut (re)calculer $f'(t) = \underbrace{60}_{u'}\times\underbrace{e^{-0,5t}}_{v} + (\underbrace{60t+40}_{u})\times(\underbrace{-0,5e^{-0,5t}}_{v'})$

$= e^{-0,5t}(60 - 30t - 20)$

$= e^{-0,5t}(-30t+40)$.

2) a) Le signe de $f'(t)$ ne dépend que du signe de $(-30t+40)$ car, pour tout réel t, on a $e^{-0,5t} > 0$.

$\hookrightarrow$ on étudie donc le signe d'une fonction affine avec $-30t+40 = 0$ qui correspond à $t = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$

on obtient donc :

cela correspond aux signes de la fonction affine $t \to -30t+40$

x	0	$\frac{4}{3}$	10
signes de $f'(t)$	$+$	0	$-$
variations de f	40 ↗	$120e^{-\frac{2}{3}}$	↘ $640e^{-5}$

On sait que $f(0) = 40$

et on a $f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(60\times\frac{4}{3}+40\right)e^{-0,5\times\frac{4}{3}} = 120e^{-\frac{2}{3}}$

$f(10) = (60\times 10 + 40)e^{-0,5\times 10} = 640e^{-5}$

b) on a $f(0)=40$, puis la fonction f est croissante sur $]0;\frac{4}{3}]$.
Donc il n'y aura pas d'autres solutions sur $]0;\frac{4}{3}]$ pour $f(t)=40$.
Par contre, sur $[\frac{4}{3};10]$, la fonction f est croissante et continue.

on a $f(\frac{4}{3}) = 120e^{-\frac{2}{3}} \approx \boxed{61,6}$
et $f(10) = 640e^{-5} \approx \boxed{4,3}$ → on a bien $\boxed{40 \in [f(10); f(\frac{4}{3})]}$

Donc, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(t)=40$ a une unique solution sur $[\frac{4}{3};10]$ et donc sur $]0;10]$.

c) on obtient, avec la calculatrice, $\boxed{\alpha \approx 3,8}$.
↳ la température redevient bien égale à 40°C au bout de (environ) 3,8 minutes

3) a) on a $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt = \int_0^4 (\underbrace{60t+40}_{u})\underbrace{e^{-0,5t}}_{v'}\,dt$

$$= \left[\underbrace{(60t+40)}_{u} \times \underbrace{\frac{e^{-0,5t}}{-0,5}}_{v}\right]_0^4 - \int_0^4 \underbrace{60}_{u'} \times \underbrace{\frac{e^{-0,5t}}{-0,5}}_{v}\,dt$$

$$= (60\times4+40)\frac{e^{-0,5\times4}}{-0,5} - (60\times0+40)\frac{e^{-0,5\times0}}{-0,5} + 120\int_0^4 e^{-0,5t}\,dt$$

$$= -560e^{-2} + 80 + 120\left[\frac{e^{-0,5t}}{-0,5}\right]_0^4$$

$\frac{60\times4+40}{-0,5} = \frac{280}{-0,5} = -560$ $\qquad \frac{-40}{-0,5} = +80$

on obtient $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt = -560e^{-2} + 80 \underbrace{-240}_{\frac{120}{-0,5}=-240}(\underbrace{e^{-0,5\times4}}_{e^{-2}} - \underbrace{e^{-0,5\times0}}_{e^{-0}=1})$

→ $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt = -560e^{-2} + 80 - 240e^{-2} + 240$

$$= -800e^{-2} + 320 = \boxed{-\frac{800}{e^2} + 320}$$ $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

b) La température moyenne sera égale à :

$$\frac{1}{4-0} \times \int_0^4 f(t)\,dt = \frac{1}{4}\left(320 - \frac{800}{e^2}\right) = \boxed{80 - \frac{200}{e^2}}$$

$$\approx \boxed{53°}$$