

b) on a $f(0) = 40$, puis la fonction f est croissante sur $]0; \frac{4}{3}]$.

Donc il n'y aura pas d'autres solutions sur $]0; \frac{4}{3}]$ pour $f(t) = 40$.

Par contre, sur $[\frac{4}{3}; 20]$, la fonction f est croissante et continue.

$$\text{on a } f\left(\frac{4}{3}\right) = 120e^{-\frac{2}{3}} \approx \boxed{61,6}$$

$$\text{et } f(20) = 640e^{-5} \approx \boxed{4,3} \rightarrow \text{on a bien } 40 \in [f(20), f(\frac{4}{3})]$$

Donc, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(t) = 40$ a une unique solution sur $[\frac{4}{3}; 20]$ et donc sur $]0; 20]$.

c) on obtient, avec la calculatrice, $\boxed{\alpha \approx 3,8}$.

↳ la température redevient bien égale à 40°C au bout de (environ) 3,8 minutes

$$\begin{aligned} 3) \text{ a) on a } \int_0^4 f(t) dt &= \int_0^4 (60t + 40) e^{-0,5t} dt \\ &= \left[(60t + 40) \frac{e^{-0,5t}}{-0,5} \right]_0^4 - \int_0^4 60 \times \frac{e^{-0,5t}}{-0,5} dt \\ &= (60 \times 4 + 40) \frac{e^{-0,5 \times 4}}{-0,5} - (60 \times 0 + 40) \frac{e^{-0,5 \times 0}}{-0,5} + 120 \int_0^4 e^{-0,5t} dt \\ &= -560e^{-2} + 80 + 120 \left[\frac{e^{-0,5t}}{-0,5} \right]_0^4 \end{aligned}$$

$$\frac{60 \times 4 + 40}{-0,5} = \frac{280}{-0,5} = -560$$

$$\frac{-40}{-0,5} = +80$$

$$\text{on obtient } \int_0^4 f(t) dt = -560e^{-2} + 80 - 240(e^{-0,5 \times 4} - e^{-0,5 \times 0})$$

$$\frac{-240}{-0,5} = -240$$

$$e^{-2}$$

$$e^{-0} = 1$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \int_0^4 f(t) dt &= -560e^{-2} + 80 - 240e^{-2} + 240 \\ &= -800e^{-2} + 320 = \boxed{-\frac{800}{e^2} + 320} \quad e^{-2} = \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

b) la température moyenne sera égale à :

$$\frac{1}{4-0} \times \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{4} \left(320 - \frac{800}{e^2} \right) = \boxed{80 - \frac{200}{e^2}}$$

$$\approx \boxed{53^\circ}$$