

Exercice 3

Affirmation 1

on utilise la représentation paramétrique de la droite (d)

On prend un vecteur directeur de (d) avec $\vec{v}_d \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$
et un vecteur normal au plan (P) avec $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

on utilise l'équation cartésienne de (P)

On constate que $\vec{n} = 6\vec{v}_d$ et on a donc des vecteurs colinéaires.
Donc la droite (d) est bien orthogonale au plan (P).

On vérifie maintenant que l'on a bien $H \in (d)$.

$$\hookrightarrow \text{on cherche } t \text{ tel que } \begin{cases} -8 + \frac{1}{3}t = -6 \rightarrow \frac{1}{3}t = 2 \rightarrow t = 6 \\ -1 + \frac{1}{2}t = 2 \rightarrow \frac{1}{2}t = 3 \rightarrow t = 6 \\ -4 + t = 2 \rightarrow t = 6 \end{cases}$$

on obtient bien une même valeur $\boxed{t=6} \rightarrow \text{on a } H \in (d)$.

④ il nous reste à vérifier que l'on a bien $H \in (P)$.

$$\hookrightarrow \text{on calcule } \underset{x_H}{2} \times \underset{y_H}{(-6)} + \underset{z_H}{3} \times \underset{y_H}{(-2)} + 6 \times 2 - 6 = 0$$

Donc on a aussi $H \in (P)$ et l'affirmation est donc **VRAIE**

Affirmation 2

$$\text{on calcule } \vec{CD} \begin{pmatrix} 0-3 \\ 2-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{CH} \begin{pmatrix} -6-3 \\ 2-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{On en déduit } \vec{CD} \cdot \vec{CH} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 \times (-9) + 2 \times 2 + 0 \times 2 = \boxed{31}$$

$$\text{et on calcule } CD = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13}$$

$$CH = \sqrt{(-9)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{89}$$

$$\text{or on sait que } \vec{CD} \cdot \vec{CH} = CD \times CH \times \cos(\widehat{DCH})$$

$$\text{soit } 31 = \sqrt{13} \times \sqrt{89} \times \cos(\widehat{DCH})$$

$$\text{on a donc } \cos(\widehat{DCH}) = \frac{31}{\sqrt{13} \times \sqrt{89}}$$

$$\text{soit } \widehat{DCH} = \cos^{-1}\left(\frac{31}{\sqrt{13} \times \sqrt{89}}\right) \approx \boxed{24^\circ} \neq \boxed{17,3^\circ}$$

$\rightarrow$ affirmation **FAUSSE**

Affirmation 3

Un vecteur normal au plan (P) sera $\vec{n}_p \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et au plan (P') sera $\vec{n}_{p'} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

on calcule $1 \cdot 2 = 0,5$ et $-2 \cdot 3 \neq 0,5$.

Les vecteurs normaux ne sont donc pas colinéaires.

Donc les plans ne sont pas parallèles $\rightarrow$ ils sont donc sécants.

On va vérifier maintenant que la droite Δ est incluse dans chaque plan $\rightarrow$ on utilise la représentation paramétrique de Δ et les équations cartésiennes des plans (P) et (P').

On a: $2(3-3t) + 3 \times 0 + 6 \times t - 6 = 6 - 6t + 6t - 6 = \boxed{0}$, pour tout t

et $3 - 3t - 2 \times 0 + 3 \times t - 3 = 3 - 3t + 3t - 3 = \boxed{0}$, pour tout t .

Donc la droite Δ est bien la droite d'intersection des deux plans (P) et (P') $\rightarrow$ affirmation **VRAIE**

Affirmation 4

on calcule $\vec{HJ} \begin{pmatrix} -\frac{54}{13} - (-6) \\ \frac{62}{13} - 2 \\ 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{13} \\ \frac{36}{13} \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{CD} \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ 2 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

on a donc $\vec{HJ} \cdot \vec{CD} = \frac{24}{13} \times (-3) + \frac{36}{13} \times 2 + (-2) \times 0 = \boxed{0}$

et on a bien $\vec{HJ} \perp \vec{CD}$.

on doit maintenant vérifier que l'on a bien $H \in (CD)$.

$\hookrightarrow$ une représentation paramétrique de la droite (CD) sera:

$$\begin{cases} x = \boxed{3} + \boxed{(-3)} \times t = 3 - 3t \\ y = \boxed{0} + \boxed{2} \times t = 2t \\ z = \boxed{0} + \boxed{0} \times t = 0 \end{cases}$$

point C

vecteur $\vec{CD}$

on cherche une valeur de t tel que

droite (CD) point H

$$\begin{cases} 3 - 3t = -\frac{54}{13} \\ 2t = \frac{62}{13} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

et on obtient bien le même paramètre $t = \frac{31}{13}$

et on a bien $J \in (CD)$ avec $\vec{HJ} \perp \vec{CD} \rightarrow$ **VRAIE**

pour vérifier $H \in (CD)$, on aurait pu aussi vérifier l'alignement des points J, C et D, en vérifiant que les vecteurs $\vec{JC}$ et $\vec{JD}$ sont bien colinéaires.