

Exercice 2

Partie A 1) on a $U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 10 = \frac{1}{2} \times 30 + 10 = \boxed{25}$

$$\text{et } U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 10 = \frac{1}{2} \times 25 + 10 = \boxed{22,5}$$

2) on sait que $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 10$ et $V_n = U_n - 20$
soit $U_n = V_n + 20$

$$\begin{aligned}\text{Donc on a } V_{n+1} &= U_{n+1} - 20 \\ &= \frac{1}{2}U_n + 10 - 20 \\ &= \frac{1}{2}(V_n + 20) + 10 - 20 = \frac{1}{2}V_n + \underbrace{\frac{1}{2} \times 20 + 10 - 20}_0\end{aligned}$$

on obtient donc $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n \rightarrow (V_n)$ est une suite géométrique de raison $\boxed{\frac{1}{2}}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 20 = 30 - 20 = \boxed{10}$

3) on applique la formule des suites géométriques

$$V_n = V_0 \times q^{n-0} = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4) on sait que $U_n = V_n + 20 \rightarrow \boxed{U_n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 20}$

5) on a $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \boxed{20}$.

Partie B

1) on calcule $W_1 = \frac{1}{2}W_0 + \frac{1}{2}U_0 + 7$
 $= \frac{1}{2} \times 45 + \frac{1}{2} \times 30 + 7 \rightarrow \boxed{W_1 = 44,5}$

2) il faut intervertir les lignes 5 et 6 du script afin de ne pas calculer le terme "suivant" U_1 de la suite (U_n) avant d'avoir calculé le terme W_1 qui se calcule à partir de W_0 et de U_0 .

3) a) initialisation

on a $W_0 = 45$

et on vérifie que $W_0 = 10 \times 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 11 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 34 = 45$.

$\rightarrow$ la propriété voulue est bien vérifiée au rang 0.

Hérédité

on suppose la propriété vraie pour n , soit $u_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$
et on veut vérifier qu'elle reste vraie pour le rang $n+1$, c'est à dire
que l'on veut vérifier l'égalité $u_{n+1} = 10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$.

$$\text{On a } u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} v_n + 7$$

$$= \frac{1}{2} \left(10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34 \right) + \frac{1}{2} \left(20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n \right) + 7$$

*c'est bien le u_n
de l'hypothèse de récurrence*

*c'est le v_n
obtenue dans la partie A.*

$$\text{on obtient } u_{n+1} = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 17 + 10 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 7$$

(on a développé en tenant compte de $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$)

$$\text{et on a } u_{n+1} = (10n+10)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$$

$$\text{soit } u_{n+1} = 10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$$

↳ on a bien l'égalité cherchée et d'après le principe de récurrence, la propriété voulue est bien vraie pour tout n .

$$\text{b) On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10}{n} = 0$$

et, en appliquant le théorème des gendarmes avec l'encadrement donné par l'énoncé, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

$$\text{De plus, on a } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ et on a donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\text{on en déduit } \lim_{n \rightarrow +\infty} 11\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\text{et on a donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \boxed{34}$$

↳ la suite (u_n) est convergente avec une limite égale à $\boxed{34}$.