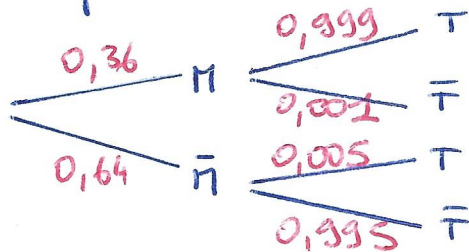


Exercice 1

Partie A 1) on nous donne $p_H(T) = \boxed{0,999}$ et $p_{\bar{H}}(T) = \boxed{0,005}$

2) avec les données, on calcule $p(M) = \frac{270\,000}{750\,000}$ ← nombre de personnes infectées
population totale
 $\hookrightarrow p(M) = \boxed{0,36}$

3) on en déduit l'arbre pondéré suivant



4) on calcule $p(M \cap T) = p(M) \times p_H(T) = 0,36 \times 0,999 = \boxed{0,360}$

5) on utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T) \\ &= 0,360 + 0,64 \times 0,005 = \boxed{0,363} \end{aligned}$$

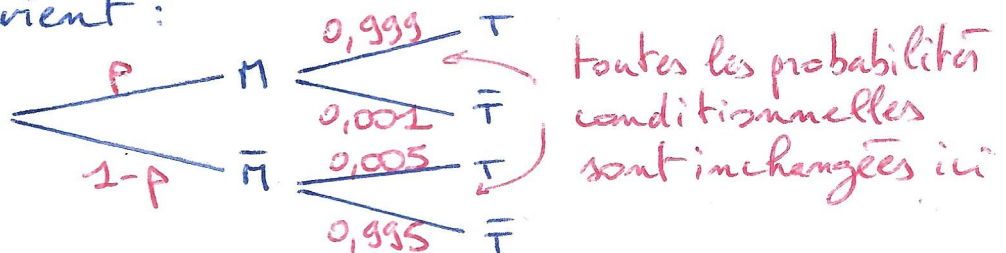
6) on obtient $p_T(M) = \frac{p(T \cap M)}{p(T)} = \frac{0,360}{0,363} \approx \boxed{0,992}$

7) L'énoncé nous indique que le test est fiable si on a $p_T(M) > 0,95 \rightarrow$ ce qui est bien le cas ici !!

Partie B

1) on ne connaît pas la valeur de $p(M)$
 $\rightarrow p(M) = p$ et $p(\bar{M}) = 1 - p(M) = 1 - p$

L'arbre pondéré devient :



2) on utilise à nouveau la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T) \\ &= p \times 0,999 + (1-p) \times 0,005 \\ &= 0,999p + 0,005 - 0,005p \\ &= \boxed{0,994p + 0,005} \end{aligned}$$

3) on a $p_T(M) = \frac{p(T \cap M)}{p(T)} = \frac{0,999p}{0,994p + 0,005} = \frac{999p}{994p + 5}$

on "multiplie la fraction" par 1000.

$$4) \text{ on veut } p_T(n) > 0,95 \text{ soit } \frac{999p}{994p + 5} > 0,95$$

$$\hookrightarrow \text{on obtient } 999p > 0,95(994p + 5)$$

$$\text{soit } 999p > 944,3p + 4,75 \text{ soit } p > \frac{4,75}{54,7} \approx 0,0868$$

Donc le test sera considéré fiable dès que $\boxed{p > 0,087}$

Partie C

on cherche n tel que $p(X \geq 1) > 0,99$

$$\begin{aligned} \text{or on a } p(X \geq 1) &= 1 - p(X=0) \\ &= 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times \underbrace{(1-p)^{n-0}}_{=(1-0,36)^n} \\ &= 1 - (0,64)^n \end{aligned}$$

L'inéquation devient alors :

$$1 - (0,64)^n > 0,99$$

$$\text{soit } (0,64)^n < 0,01$$

$$\text{soit } \ln(0,64)^n < \ln(0,01)$$

on applique la fonction $\ln$ qui est croissante et qui conserve l'ordre.

$$\text{on obtient: } n \times \ln(0,64) < \ln(0,01)$$

$$\text{soit } n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,64)} \approx 10,32$$

on a divisé par $\ln(0,64)$ qui est négatif

Donc on aura le résultat souhaité à partir d'un échantillon de 11 individus.