Bac Spé Maths 2025
Voici la correction complète
du jour 1
pour le sujet Asie - Pacifique
Mercredi 11 Juin 2025

Correction proposée par

Bruno Swiners

www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

AFFIRMATION 1 : on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\1-1\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\alpha-1\\3-1\\\alpha-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-1\\2\\\alpha\end{pmatrix}$

on vérifie que $1:(\alpha-1)\neq 0$ et que $0:2=0$

Donc, pour tout α, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Donc les points A, B et C ne sont pas alignés → ils forment un plan.

et on s'intéresse maintenant aux produits scalaires !

On a $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{j}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=1\times0+0\times1+0\times0=\boxed{0}$

et $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{j}=\begin{pmatrix}\alpha-1\\2\\\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=(\alpha-1)\times0+2\times1+\alpha\times0=\boxed{2}\neq0$

Donc le vecteur $\vec{j}$ n'est pas normal au plan (ABC) → $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 2 :

Avec la représentation paramétrique de (d), on obtient un vecteur directeur que l'on notera $\vec{v_d}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

on va vérifier la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v_d}$.

On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\alpha-1\\2\\\alpha\end{pmatrix}$ et $\vec{v_d}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

or on a $y_{\overrightarrow{AC}}=y_{\vec{v_d}}=2$, et la seule possibilité pour être colinéaire sera d'avoir directement $\overrightarrow{AC}=\vec{v_d}$.

Et, pour cela, il faudrait que $\alpha-1=1$ et $\alpha=-1$

soit $\alpha=2$ et $\alpha=-1$

et c'est impossible ! → $\boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 3

On doit ici utiliser le calcul du produit scalaire $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$ avec la formule s'écrivant avec $\cos(\widehat{OAB})$.

on a $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}0-1\\0-1\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\1-1\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

on calcule alors $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=-1\times1+(-1)\times0+0\times0=\boxed{-1}$

et on sait que $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=AO\times AB\times\cos(\widehat{OAB})$

↳ on calcule $AO=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$

$AB=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=\sqrt{1}=1$

On a donc $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=-1=\sqrt{2}\times1\times\cos(\widehat{OAB})$

soit $\cos(\widehat{OAB})=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\times1}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\rightarrow\widehat{OAB}=\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\boxed{135°}$

→ $\boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 4

Il faut ici vérifier 2 conditions : le point H doit appartenir à la droite (d) et on doit avoir $(AH) \perp (d)$.

On commence par vérifier si l'on a bien $H \in (d)$.

Pour cela, on cherche une valeur du paramètre t tel que

$$\underbrace{\begin{cases} 1+t = 1 \\ 2t = 2 \\ -t = 2 \end{cases}}_{\text{droite } (d)} \quad \begin{matrix} \longrightarrow t=0 \\ \longrightarrow t=\frac{2}{2}=1 \\ \longrightarrow t=-2 \end{matrix}$$

point H

$\longrightarrow$ on n'obtient pas une valeur unique pour t !!

Donc le point H n'appartient pas à la droite (d).

Donc le point H ne peut pas être le projeté orthogonal de A sur (d)

$\longrightarrow \boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 5

Les points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartenant à la sphère vérifieront

$OM = 1$ c'est à dire $OM^2 = 1^2 = 1$.

on obtient donc $\left(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}\right)^2 = 1$

soit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

On cherche alors l'intersection avec la droite (d) et on utilise l'équation paramétrique de (d).

↳ on cherche les éventuelles valeurs de t tel que

$$(1+t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2 = 1$$

soit $1+2t+t^2 + 4t^2 + t^2 = 1$

soit $6t^2 + 2t = 0$

↳ $t(6t+2) = 0$

↳ $t = \boxed{0}$ ou $6t+2=0$

$t = -\frac{2}{6} = \boxed{-\frac{1}{3}}$

On obtient donc deux valeurs du paramètre t,

ce qui donne bien deux points distincts

de coordonnées $\begin{pmatrix} 1+0 \\ 2\times 0 \\ -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1+(-\frac{1}{3}) \\ 2\times(-\frac{1}{3}) \\ -(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \boxed{\text{VRAIE}}$

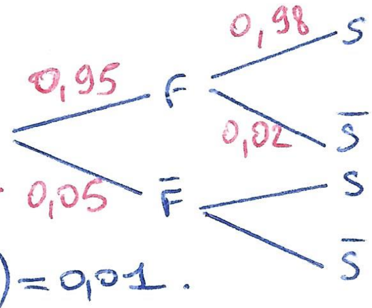
Exercice 2

Partie A

1) on a $p(F) = 0{,}95$ et on a $p_F(S) = 0{,}98$

2) a) on obtient l'arbre suivant

$(1 - 0{,}95)$



et l'énoncé nous donne $p(\bar{F} \cap \bar{S}) = 0{,}01$.

b) on cherche $p_{\bar{F}}(\bar{S}) = \dfrac{p(\bar{F} \cap \bar{S})}{p(\bar{F})} = \dfrac{0{,}01}{0{,}05} = \boxed{0{,}2}$

3) on calcule $p(F \cap S) = p(F) \times p_F(S) = 0{,}95 \times 0{,}98 = \boxed{0{,}931}$

4) on utilise la formule des probabilités totales :

$$p(S) = p(S \cap F) + p(S \cap \bar{F})$$
$$= 0{,}931 + p(\bar{F}) \times p_{\bar{F}}(S)$$

avec $p_{\bar{F}}(S) = 1 - p_{\bar{F}}(\bar{S})$
$= 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

on obtient $p(S) = 0{,}931 + 0{,}05 \times 0{,}8$
$\approx \boxed{0{,}97}$

5) on cherche $p_S(F) = \dfrac{p(S \cap F)}{p(S)} = \dfrac{0{,}931}{0{,}97} \approx \boxed{0{,}96}$

Partie B

1) on applique le cours et on obtient :

$$E(S_n) = n \times p = \boxed{0{,}95\,n}$$

et $V(S_n) = n \times p \times (1-p) = 0{,}95n \times 0{,}05 = \boxed{0{,}0475n}$

2) a) on peut utiliser notre calculatrice avec $n = 150$
et $p = 0{,}95$

↳ on obtient $p(S_{150} = 145) \approx \boxed{0{,}1088}$

Donc, sur 150 jouets, la probabilité d'avoir exactement 145 jouets ayant réussi le test est d'environ 10,88 %.

b) on calcule 94% de 150 jouets $= 0{,}94 \times 150 = 141$ jouets.

et on s'intéresse ici à $p(S_{150} \geq 141)$

et on obtient $p(S_{150} \geq 141) \approx \boxed{0{,}781}$

3) a) on applique les formules du cours.

$$E(F_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{0{,}95\cancel{n}}{\cancel{n}} = \boxed{0{,}95}$$

et $V(F_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{0{,}0475\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}} = \boxed{\frac{0{,}0475}{n}}$

attention !

b) on constate que l'espérance $E(F_n)$ ($= 0{,}95$ ou 95%) est bien au "milieu" entre 93% et 97%.

Donc, dans cette question, on veut :

$$p(|F_n - E(F_n)| < 0{,}02) \geq 0{,}96$$

or on a $p(|F_n - E(F_n)| < 0{,}02) = 1 - p(|F_n - E(F_n)| \geq 0{,}02)$

et, avec l'inégalité de Bienaymé Tchebichev, on sait que :

$$p(|F_n - E(F_n)| \geq 0{,}02) \leq \frac{V(F_n)}{0{,}02^2}$$

qui devient $1 - p(|F_n - E(F_n)| \geq 0{,}02) \geq 1 - \frac{V(F_n)}{0{,}02^2}$

La condition voulue devient donc :

$$1 - \frac{V(F_n)}{0{,}02^2} \geq 0{,}96$$

soit $$1 - \frac{0{,}0475}{0{,}02^2 \times n} \geq 0{,}96$$

soit $$\frac{0{,}0475}{0{,}02^2 \times n} \leq 0{,}04$$

c'est à dire $$n \geq \frac{0{,}0475}{0{,}02^2 \times 0{,}04} \rightarrow n \geq 2968{,}75.$$

On aura donc la condition voulue pour des lots comprenant au moins 2969 jouets.

Exercice 3

Partie A   1) on a $U_2 = 2 + 0{,}8 \times U_1 = 2 + 0{,}8 \times 2 = \boxed{3{,}6}$

2) initialisation   on sait que $U_1 = 2$

et on calcule $U_1 = 10 - 8 \times 0{,}8^{\overset{=1}{1-1}} = 10 - 8 \times 0{,}8^0 = 10 - 8 = 2$

→ on a bien la propriété vérifiée au rang 1.

Hérédité : on suppose P_n vraie soit $U_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$

et montrons que P_{n+1} reste vraie soit $U_{n+1} = 10 - 8 \times 0{,}8^{n}$ ← $(n+1)-1$

or on a $U_{n+1} = 2 + 0{,}8\,U_n$

$= 2 + 0{,}8(10 - 8 \times 0{,}8^{n-1})$

$= \underbrace{2 + 0{,}8 \times 10}_{} - 8 \times \underbrace{0{,}8 \times 0{,}8^{n-1}}_{}$

$= \quad 10 \quad - 8 \times 0{,}8^{n}$

et on obtient bien $U_{n+1} = 10 - 8 \times 0{,}8^{n}$,

et d'après le principe de récurrence, on aura bien la propriété vérifiée pour tout $n \geq 1$.

3) on a $0 < 0{,}8 < 1$ donc on a $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}8)^{n-1} = 0$

et on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \boxed{10}$

→ à terme, la quantité de médicament se rapprochera de $\boxed{10\,mL}$

4) on veut résoudre $U_N \geq 10$ soit $10 - 8 \times 0{,}8^{N-1} \geq 10$

c'est à dire $-8 \times 0{,}8^{N-1} \geq 0$, ce qui est impossible

car la quantité $-8 \times 0{,}8^{N-1}$ est strictement négative.

→ cela signifie que la quantité de médicament ne dépassera jamais 10 mL.

5) on veut résoudre ici $U_n > 9$ → $10 - 8 \times 0{,}8^{n-1} > 9$

→ $8 \times 0{,}8^{n-1} < 1$ → $0{,}8^{n-1} < 1/8$

→ $\ln(0{,}8)^{n-1} < \ln(1/8)$

la fonction ln est croissante et elle conserve l'ordre et $\ln\left(\frac{1}{8}\right) = -\ln 8$

on obtient : $(n-1)\ln(0{,}8) < -\ln 8$

soit $n - 1 \overset{\triangle}{>} \dfrac{-\ln 8}{\ln(0{,}8)}$ ← on a divisé par $\ln(0{,}8)$ qui est négatif !

soit $n > \dfrac{-\ln 8}{\ln(0{,}8)} + 1 \approx 10{,}32$

et on aura bien la condition voulue à partir de la $\boxed{11^e \text{ prise}}$.

Partie B 1) on a $S_2 = \dfrac{U_1 + U_2}{2} = \dfrac{2 + 3{,}6}{2} = \boxed{2{,}8}$

2) on a $U_1 + U_2 + \dots + U_n = \left.\begin{array}{l} 10 - 8 \times 0{,}8^{1-1} \\ + 10 - 8 \times 0{,}8^{2-1} \\ + \dots \text{etc} \dots \\ + 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1} \end{array}\right\}$ il y a "n" termes

soit $U_1 + U_2 + \dots + U_n = 10 \times n - 8 \underbrace{(0{,}8^0 + 0{,}8^1 + \dots + 0{,}8^{n-1})}_{\text{somme de termes d'une suite géométrique de raison } 0{,}8 \text{ et de premier terme } 0{,}8^0 = 1}$

On obtient $U_1 + U_2 + \dots + U_n = 10n - 8 \times \left(1 \times \dfrac{1 - (0{,}8)^n}{1 - 0{,}8}\right)$

$= 10n - \dfrac{8}{0{,}2}(1 - (0{,}8)^n) = 10n - 40(1 - (0{,}8)^n)$

et donc on obtient bien $U_1 + U_2 + \dots + U_n = 10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n$.

3) Du coup, on en déduit $S_n = \dfrac{10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n}{n}$

c'est à dire $S_n = \dfrac{\cancel{n}\left(10 - \frac{40}{\cancel{n}} + \frac{40 \times 0{,}8^n}{n}\right)}{\cancel{n}} = 10 - \dfrac{40}{n} + \dfrac{40 \times 0{,}8^n}{n}$

et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{40}{n} = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$ et aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{40 \times 0{,}8^n}{n} = 0$

On obtient finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \boxed{10}$

4) La valeur renvoyée va correspondre au nombre de prise du médicament à partir duquel la quantité moyenne de ce médicament sera supérieure ou égale à 9 mL.

5) on calcule $S_{10} = \dfrac{U_1 + U_2 + \dots + U_{10}}{10} = \dfrac{10 \times 10 - 40 + 40 \times 0{,}8^{10}}{10}$

↳ $S_{10} \approx 6{,}43$

or on admet dans l'énoncé que la suite (S_n) est croissante.

Donc, avant la 10^e prise, on aura forcément une quantité moyenne inférieure à 6,43 et il faudra forcément que le rang n dépasse 10 afin que la quantité moyenne dépasse déjà 6,43, puis, petit à petit, la valeur 9.

Exercice 4

1) a) on applique la formule $(e^u)' = u'e^u$ avec $u(x) = \sqrt{x}$

↳ on obtient $(e^{\sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = f(x)$.

b) on applique la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = e^{\sqrt{x}} \to u'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et avec $v(x) = 2\sqrt{x} \to v'(x) = \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

On obtient $f'(x) = \dfrac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{\cancel{2\sqrt{x}}} \times \cancel{2\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \dfrac{e^{\sqrt{x}} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x}$

c'est à dire $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}}{4x \times \sqrt{x}} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}$

2) a) on a $\lim_{x \to 0} e^{\sqrt{x}} = e^0 = 1$ et $\lim_{x \to 0} 2\sqrt{x} = 2\sqrt{0} = 0^+$

Donc, pour $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$, on se retrouve avec une limite du type $\frac{1}{0^+}$

et, par quotient des limites, on a $\lim_{x \to 0} f(x) = \boxed{+\infty}$

b) cette limite va nous donner une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

3) a) on a $\lim_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$

Donc, on a une forme indéterminée pour cette question.

Mais en utilisant les croissances comparées, on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \boxed{+\infty}$

b) le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $(\sqrt{x} - 1)$

↳ on résout $\sqrt{x} - 1 = 0 \to \sqrt{x} = 1 \to x = 1$

et on obtient

x	0		1		$+\infty$
signes de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	↘	$f(1) = \frac{e^{\sqrt{1}}}{2\sqrt{1}} = \frac{e}{2}$	↗	$+\infty$

c) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

On a $f(1) = \frac{e}{2} \approx 1,36$

et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ → Le nombre 2 appartient bien à cet intervalle $\left[\frac{e}{2} ; +\infty\right[$

D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 2$ admet donc une unique solution sur $[1 ; +\infty[$.

et, avec la calculatrice, on a $\boxed{4{,}6 < \alpha < 4{,}7}$

4) a) on a $I = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx = \left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^2 = e^{\sqrt{2}} - e^{\sqrt{1}} = \boxed{e^{\sqrt{2}} - e}$

$e^{\sqrt{x}}$ est une primitive de $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ car $(e^{\sqrt{x}})' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

b) cette intégrale correspond à l'AIRE du domaine délimité par les droites verticales $x = 1$ et $x = 2$, par l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_f$ — on parle d'aire "sous la courbe".

5) a) Le signe de $f''(x)$ ne dépend que du signe de $(x - 3\sqrt{x} + 3)$

↳ on pose $X = \sqrt{x}$ et on a donc $X^2 = (\sqrt{x})^2 = x$.

On obtient donc le trinôme $\boxed{X^2 - 3X + 3}$

↳ on résout $X^2 - 3X + 3 = 0 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3$
$= -3 < 0$

Donc il n'y a aucune racine et le trinôme a donc un signe constant qui sera POSITIF ici.

↳ pour tout X, on aura $X^2 - 3X + 3 > 0$

et, donc, pour $x \in]0 ; +\infty[$, on a bien $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$.

b) Sachant que le signe de $f''(x)$ ne dépend que du signe de $(x - 3\sqrt{x} + 3)$ et que cette expression est strictement positive sur $]0 ; +\infty[$,

on en déduit que $f''(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$

et la fonction f est donc CONVEXE sur $]0 ; +\infty[$.