

Exercice 4

1) a) on applique la formule $(e^u)' = u' e^u$ avec $v(x) = \sqrt{x}$

↳ on obtient $(e^{\sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = f(x)$.

b) on applique la formule $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

avec $u(x) = e^{\sqrt{x}} \rightarrow u'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et avec $v(x) = 2\sqrt{x} \rightarrow v'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

on obtient $f'(x) = \frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{e^{\sqrt{x}} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x}$

c'est à dire $f'(x) = \frac{\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}}{4x \times \sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}$

2) a) on a $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\sqrt{x}} = e^0 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{x} = 2\sqrt{0} = 0^+$

Donc, pour $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$, on se retrouve avec une limite du type $\frac{1}{0^+}$

et, par quotient des limites, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \boxed{+\infty}$

b) cette limite va nous donner une asymptote verticale d'équation $x=0$.

3) a) on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$

Donc, on a une forme indéterminée pour cette question.

Mais on utilisant les croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \boxed{+\infty}$

b) le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $(\sqrt{x} - 1)$

↳ on résout $\sqrt{x} - 1 = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1$

et on obtient

x	0	1	$+\infty$
signes de $f'(x)$	-	0	+
variations de f	$+\infty$	$f(1) = \frac{e^{\sqrt{1}}}{2\sqrt{1}} = \frac{e}{2}$	$+\infty$

c) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

on a $f(1) = \frac{e}{2} \approx 1,36$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ → Le nombre 2 appartient bien à cet intervalle $[\frac{e}{2}; +\infty[$

D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 2$ admet donc une unique solution sur $[1; +\infty[$.

et, avec la calculatrice, on a $\boxed{4,6 < x < 4,7}$

4) a) on a $I = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = \left[e^{\sqrt{x}} \right]_1^2 = e^{\sqrt{2}} - e^{\sqrt{1}} = \boxed{e^{\sqrt{2}} - e}$

$e^{\sqrt{x}}$ est une primitive de $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ car $(e^{\sqrt{x}})' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

b) cette intégrale correspond à l'aire du domaine délimité par les droites verticales $x=1$ et $x=2$, par l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_f$ → on parle d'aire "sous la courbe".

5) a) Le signe de $f''(x)$ ne dépend que du signe de $(x - 3\sqrt{x} + 3)$

↳ on pose $X = \sqrt{x}$ et on a donc $X^2 = (\sqrt{x})^2 = x$.

on obtient donc le trinôme $\boxed{X^2 - 3X + 3}$

↳ on résout $X^2 - 3X + 3 = 0 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$

Donc il n'y a aucune racine et le trinôme a donc un signe constant qui sera positif ici.

↳ pour tout X , on aura $X^2 - 3X + 3 > 0$

et, donc, pour $x \in]0; +\infty[$, on a bien $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$.

b) Sachant que le signe de $f''(x)$ ne dépend que du signe de $(x - 3\sqrt{x} + 3)$ et que cette expression est strictement positive sur $]0; +\infty[$,

on en déduit que $f''(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$

et la fonction f est donc CONVEXE sur $]0; +\infty[$.