

Exercice 3

Partie A 1) on a $U_2 = 2 + 0,8 \times U_1 = 2 + 0,8 \times 2 = \boxed{3,6}$

2) initialisation on sait que $U_1 = 2$

et on calcule $U_1 = 10 - 8 \times 0,8^{1-1} = 10 - 8 \times 0,8^0 = 10 - 8 = 2$

on a bien la propriété vérifiée au rang 1.

Hérédité : on suppose P_n vraie soit $U_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$

et montrons que P_{n+1} reste vraie soit $U_{n+1} = 10 - 8 \times 0,8^{(n+1)-1}$

$$\begin{aligned} \text{or on a } U_{n+1} &= 2 + 0,8 U_n \\ &= 2 + 0,8 (10 - 8 \times 0,8^{n-1}) \\ &= 2 + 0,8 \times 10 - 8 \times 0,8 \times 0,8^{n-1} \\ &= \underline{10} - 8 \times \underline{0,8^n} \end{aligned}$$

et on obtient bien $U_{n+1} = 10 - 8 \times 0,8^n$,

et d'après le principe de récurrence, on aura bien la propriété vérifiée pour tout $n \geq 1$.

3) on a $0 < 0,8 < 1$ donc on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,8)^{n-1} = 0$

et on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \boxed{10}$

→ à terme, la quantité de médicament se rapprochera de $\boxed{10 \text{ mL}}$

4) on veut résoudre $U_n \geq 10$ soit $10 - 8 \times 0,8^{n-1} \geq 10$

c'est à dire $-8 \times 0,8^{n-1} \geq 0$, ce qui est impossible car la quantité $-8 \times 0,8^{n-1}$ est strictement négative.

→ cela signifie que la quantité de médicament ne dépassera jamais 10 mL.

5) on veut résoudre ici $U_n > 9 \rightarrow 10 - 8 \times 0,8^{n-1} > 9$

$$\rightarrow 8 \times 0,8^{n-1} < 1 \rightarrow 0,8^{n-1} < \frac{1}{8}$$

$$\rightarrow \ln(0,8)^{n-1} < \ln\left(\frac{1}{8}\right)$$

la fonction $\ln$ est croissante et elle conserve l'ordre et $\ln\left(\frac{1}{8}\right) = -\ln 8$

on obtient: $(n-1) \ln(0,8) < -\ln 8$

$$\text{soit } n-1 > \frac{-\ln 8}{\ln(0,8)}$$

$$\text{soit } n > \frac{-\ln 8}{\ln(0,8)} + 1$$

$$\approx 10,32$$

on a divisé par $\ln(0,8)$ qui est négatif !

et on aura bien la condition voulue à partir de la $\boxed{11^{\text{e}} \text{ prise}}$.

Partie B 1) on a $S_2 = \frac{U_1 + U_2}{2} = \frac{2 + 3,6}{2} = \boxed{2,8}$

2) on a $U_1 + U_2 + \dots + U_n =$

$$\begin{aligned} & 10 - 8 \times 0,8^{1-1} \\ & + 10 - 8 \times 0,8^{2-1} \\ & + \dots \text{etc} \dots \\ & + 10 - 8 \times 0,8^{n-1} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & 10 - 8 \times 0,8^{1-1} \\ & + 10 - 8 \times 0,8^{2-1} \\ & + \dots \text{etc} \dots \\ & + 10 - 8 \times 0,8^{n-1} \end{aligned}} \right\} \text{il y a "n" termes}$$

soit $U_1 + U_2 + \dots + U_n = 10 \times n - 8(0,8^0 + 0,8^1 + \dots + 0,8^{n-1})$

somme de termes d'une suite géométrique de raison $0,8$ et de premier terme $0,8^0 = 1$

on obtient $U_1 + U_2 + \dots + U_n = 10n - 8 \times \left(1 \times \frac{1 - (0,8)^n}{1 - 0,8} \right)$

$$= 10n - \frac{8}{0,2} (1 - (0,8)^n) = 10n - 40(1 - (0,8)^n)$$

et donc on obtient bien $U_1 + U_2 + \dots + U_n = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n$.

3) Du coup, on en déduit $S_n = \frac{10n - 40 + 40 \times 0,8^n}{n}$

c'est à dire $S_n = \frac{n(10 - \frac{40}{n} + \frac{40 \times 0,8^n}{n})}{n} = \cancel{10} - \frac{40}{n} + \frac{40 \times 0,8^n}{n}$

et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{40}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$ et aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{40 \times 0,8^n}{n} = 0$

on obtient finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \boxed{10}$

4) la valeur renvoyée va correspondre au nombre de prise du médicament à partir duquel la quantité moyenne de ce médicament sera supérieure ou égale à 9 mL.

5) on calcule $S_{10} = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_{10}}{10} = \frac{10 \times 10 - 40 + 40 \times 0,8^{10}}{10}$

$\hookrightarrow S_{10} \approx 6,43$

or on admet dans l'énoncé que la suite (S_n) est croissante.

Donc, avant la 10^e prise, on aura forcément une quantité moyenne inférieure à 6,43 et il faudra forcément que le rang n dépasse 10 afin que la quantité moyenne dépasse déjà 6,43, puis, petit à petit, la valeur 9.