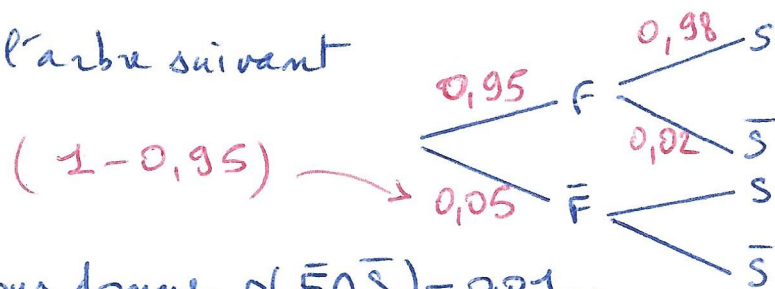


Exercice 2

Partie A 1) on a $p(F) = 0,95$ et on a $p_F(S) = 0,98$

2) a) on obtient l'arbre suivant



et l'énoncé nous donne $p(\bar{F} \cap \bar{S}) = 0,01$.

b) on cherche $p_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{p(\bar{F} \cap \bar{S})}{p(\bar{F})} = \frac{0,01}{0,05} = \boxed{0,2}$

3) on calcule $p(F \cap S) = p(F) \times p_F(S) = 0,95 \times 0,98 = \boxed{0,931}$

4) on utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(S \cap F) + p(S \cap \bar{F}) \\ &= 0,931 + p(\bar{F}) \times p_{\bar{F}}(S) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } p_{\bar{F}}(S) &= 1 - p_{\bar{F}}(\bar{S}) \\ &= 1 - 0,2 = 0,8 \end{aligned}$$

on obtient $p(S) = 0,931 + 0,05 \times 0,8$
 $\approx \boxed{0,97}$

5) on cherche $p_S(F) = \frac{p(S \cap F)}{p(S)} = \frac{0,931}{0,97} \approx \boxed{0,96}$

Partie B

1) on applique le cours et on obtient :

$$E(S_n) = n \times p = \boxed{0,95n}$$

$$\text{et } V(S_n) = n \times p \times (1-p) = 0,95n \times 0,05 = \boxed{0,0475n}$$

2) a) on peut utiliser notre calculatrice avec $n = 150$
et $p = 0,95$

$$\hookrightarrow \text{on obtient } p(S_{150} = 145) \approx \boxed{0,1088}$$

Donc, sur 150 jouets, la probabilité d'avoir exactement 145 jouets ayant réussi le test est d'environ 10,88 %.

b) on calcule 94% de 150 jouets $= 0,94 \times 150 = 141$ jouets.
et on s'intéresse ici à $p(S_{150} \geq 141)$

$$\text{et on obtient } p(S_{150} \geq 141) \approx \boxed{0,781}$$

3) a) on applique les formules du cours.

$$E(F_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E(S_n) = \frac{0,95n}{n} = \boxed{0,95}$$

$$\text{et } V(F_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{0,0475n}{n^2} = \boxed{\frac{0,0475}{n}}$$

attention! ↗

b) on constate que l'espérance $E(F_n)$ ($= 0,95$ ou 95%) est bien au "milieu" entre 93% et 97% .

Donc, dans cette question, on veut:

$$P(|F_n - E(F_n)| < 0,02) \geq 0,96$$

$$\text{or on a } P(|F_n - E(F_n)| < 0,02) = 1 - P(|F_n - E(F_n)| \geq 0,02)$$

et, avec l'inégalité de Bienayme Tchebichev, on sait que:

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq 0,02) \leq \frac{V(F_n)}{0,02^2}$$

$$\text{qui devient } 1 - P(|F_n - E(F_n)| \geq 0,02) \geq 1 - \frac{V(F_n)}{0,02^2}$$

La condition voulue devient donc:

$$1 - \frac{V(F_n)}{0,02^2} \geq 0,96$$

$$\text{soit } 1 - \frac{0,0475}{0,02^2 \times n} \geq 0,96$$

$$\text{soit } \frac{0,0475}{0,02^2 \times n} \leq 0,04$$

$$\text{c'est à dire } n \geq \frac{0,0475}{0,02^2 \times 0,04} \rightarrow n \geq 2968,75$$

On aura donc la condition voulue pour des lots comprenant au moins 2969 jouets.