

Exercice 1

AFFIRMATION 1 : on a $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 3-1 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

on vérifie que $1: (\alpha-1) \neq 0$ et que $0:2=0$

Donc, pour tout α , les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Donc les points A, B et C ne sont pas alignés $\rightarrow$ ils forment un plan.

② on s'intéresse maintenant aux produits scalaires !

$$\text{On a } \vec{AB} \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = \boxed{0}$$

$$\text{et } \vec{AC} \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\alpha-1) \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times 0 = \boxed{2} \neq 0$$

Donc le vecteur $\vec{j}$ n'est pas normal au plan (ABC) $\rightarrow$ **FAUSSE**

AFFIRMATION 2 :

Avec la représentation paramétrique de (d), on obtient un vecteur directeur que l'on notera $\vec{v}_d \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

on va vérifier la colinéarité des vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{v}_d$.

$$\text{on a } \vec{AC} \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_d \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

or on a $y_{\vec{AC}} = y_{\vec{v}_d} = 2$, et la seule possibilité pour être colinéaire sera d'avoir directement $\vec{AC} = \vec{v}_d$.

Et, pour cela, il faudrait que $\alpha-1=1$ et $\alpha=-1$
soit $\alpha=2$ et $\alpha=-1$

et c'est impossible ! $\rightarrow$ **FAUSSE**

AFFIRMATION 3

On doit ici utiliser le calcul du produit scalaire $\vec{AO} \cdot \vec{AB}$ avec la formule s'écrivant avec $\cos(\widehat{OAB})$.

$$\text{on a } \vec{AO} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AB} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{on calcule alors } \vec{AO} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \times 1 + (-1) \times 0 + 0 \times 0 = \boxed{-1}$$

$$\text{et on sait que } \vec{AO} \cdot \vec{AB} = AO \times AB \times \cos(\widehat{OAB})$$

$$\hookrightarrow \text{on calcule } AO = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\text{On a donc } \vec{AO} \cdot \vec{AB} = -1 = \sqrt{2} \times 1 \times \cos(\widehat{OAB})$$

$$\text{soit } \cos(\widehat{OAB}) = \frac{-1}{\sqrt{2} \times 1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \widehat{OAB} = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{135^\circ}$$

$\rightarrow$ **VRAIE**

AFFIRMATION 4

Il faut ici vérifier 2 conditions : le point H doit appartenir à la droite (d) et on doit avoir $(AH) \perp (d)$.

On commence par vérifier si l'on a bien $H \in (d)$.

Pour cela, on cherche une valeur du paramètre t tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} 1+t = 1 \rightarrow t = 0 \\ 2t = 2 \rightarrow t = \frac{2}{2} = 1 \\ -t = 2 \rightarrow t = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{on n'obtient pas une valeur unique pour } t !!$$

droite (d) point H

Donc le point H n'appartient pas à la droite (d).

Donc le point H ne peut pas être le projeté orthogonal de A sur (d)

→ **FAUSSE**

AFFIRMATION 5

Les points M $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartenant à la sphère vérifieront

$$OM = 1 \quad \text{c'est à dire } OM^2 = 1^2 = 1.$$

$$\text{on obtient donc } \left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \right)^2 = 1$$

$$\text{soit } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

on cherche alors l'intersection avec la droite (d) et on utilise l'équation paramétrique de (d).

↳ on cherche les éventuelles valeurs de t tel que

$$(1+t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2 = 1$$

$$\text{soit } 1 + 2t + t^2 + 4t^2 + t^2 = 1$$

$$\text{soit } 6t^2 + 2t = 0$$

$$\hookrightarrow t(6t+2) = 0$$

$$\hookrightarrow t = \boxed{0} \text{ ou } 6t+2=0$$

$$t = -\frac{2}{6} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

On obtient donc deux valeurs du paramètre t,

ce qui donne bien deux points distincts

$$\text{les coordonnées } \begin{pmatrix} 1+0 \\ 2 \times 0 \\ -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1+(-\frac{1}{3}) \\ 2 \times (-\frac{1}{3}) \\ -(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

→ **VRAIE**