BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 16

L'usage de la calculatrice en mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Tous les exercices doivent être traités.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidates et les candidats sont invités à faire figurer sur leurs copies toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse.

EXERCICE 1 (5 points)

Toutes les probabilités, sauf indication contraire, seront arrondies à 10^{-3} dans cet exercice.

« Le virus du chikungunya, transmis à l'homme par la piqûre du moustique tigre provoque chez les patients des douleurs articulaires aiguës qui peuvent être persistantes. En 2005, une importante épidémie de chikungunya a touché les îles de l'Océan Indien et notamment l'île de La Réunion, avec plusieurs centaines de milliers de cas déclarés. En 2007, la maladie a fait son apparition en Europe, puis fin 2013, aux Antilles et a atteint le continent américain en 2014 ».
(https ://www.pasteur.fr/fr/centre-medical/fiches-maladies/chikungunya)

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus.
Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu atteint par le virus ait un test positif est de $0{,}999$;
- la probabilité qu'un individu non atteint par le virus ait un test positif est de $0{,}005$.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population cible.
Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'événement : « l'individu choisi est atteint du chikungunya ».
- T l'événement : « le test de l'individu choisi est positif ».

On considère que le test est *fiable* lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus est supérieure à $0{,}95$.

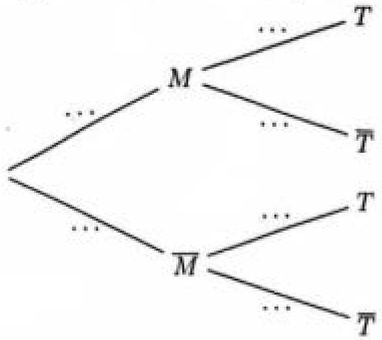
Partie A : Étude d'un exemple

1. Donner les probabilités $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$.

« En mars 2005, l'épidémie s'est propagée rapidement dans l'île de La Réunion, avec une flambée importante entre fin avril et début juin puis une persistance de la transmission virale durant l'hiver austral. Au total, 270 000 personnes ont été infectées pour une population totale de 750 000 individus ».
(https ://www.pasteur.fr/fr/centre-medical/fiches-maladies/chikungunya)
Fin 2005, le laboratoire a effectué un test de dépistage massif de la population de l'île de La Réunion.
Dans cette partie, la population cible est donc la population de l'île de La Réunion.

2. Donner la valeur exacte de $P(M)$.

3. Recopier et compléter l'arbre pondéré donné ci-dessous.



4. Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par le virus et ait un test positif.
5. Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif.
6. Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus.
7. Peut-on estimer que ce test est fiable ? Argumenter.

Partie B : Dépistage sur une population cible

Dans cette partie, on note p la proportion de personnes atteintes par le virus du chikungunya dans une population cible.
On cherche ici à tester la fiabilité du test de ce laboratoire en fonction de p.

1. Recopier, en l'adaptant, l'arbre pondéré de la question A3 en tenant compte des nouvelles données.
2. Exprimer la probabilité $P(T)$ en fonction de p.
3. Montrer que $P_T(M) = \dfrac{999p}{994p+5}$.
4. Pour quelles valeurs de p peut-on considérer que ce test est fiable ?

Partie C : Étude sur un échantillon

Pendant l'épidémie, on admet que la probabilité d'être atteint du chikungunya sur l'île de La Réunion est de 0,36.
On considère un échantillon de n individus choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant le nombre d'individus infectés dans cet échantillon parmi les n tirés au sort.
On admet que X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}36$.

Déterminer à partir de combien d'individus n la probabilité de l'événement « au moins un des n habitants de cet échantillon est atteint par le virus » est supérieure à 0,99. Expliquer la démarche.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$.
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n). Justifier la réponse.

Partie B

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$$

1. Montrer que $w_1 = 44{,}5$.

On souhaite écrire une fonction `suite`, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-dessous une proposition pour cette fonction `suite`.

```
def suite(n):
    U=30
    W=45
    for i in range (1,n+1):
        U=U/2+10
        W=W/2+U/2+7
    return W
```

2. L'exécution de `suite(1)` ne renvoie pas le terme w_1. Comment modifier la fonction `suite` afin que l'exécution de `suite(n)` renvoie la valeur du terme w_n ?
3. (a) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n on a :

$$w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

   (b) On admet que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a : $0 \leq 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{n}$.

   Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?

EXERCICE 3 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$.
On considère :

- les points $C\,(3\,;\,0\,;\,0)$, $D\,(0\,;\,2\,;\,0)$, $H\,(-6\,;\,2\,;\,2)$ et $J\left(\dfrac{-54}{13}\,;\,\dfrac{62}{13}\,;\,0\right)$;
- le plan P d'équation cartésienne $2x+3y+6z-6=0$;
- le plan P' d'équation cartésienne $x-2y+3z-3=0$;
- la droite (d) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -8+\dfrac{1}{3}t \\ y = -1+\dfrac{1}{2}t \\ z = -4+t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : La droite (d) est orthogonale au plan P et coupe ce plan en H.

Affirmation 2 : La mesure en degré de l'angle $\widehat{DCH}$, arrondie à 10^{-1}, est 17,3°.

Affirmation 3 : Les plans P et P' sont sécants et leur intersection est la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3-3t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

Affirmation 4 : Le point J est le projeté orthogonal du point H sur la droite (CD).

EXERCICE 4 (5 points)

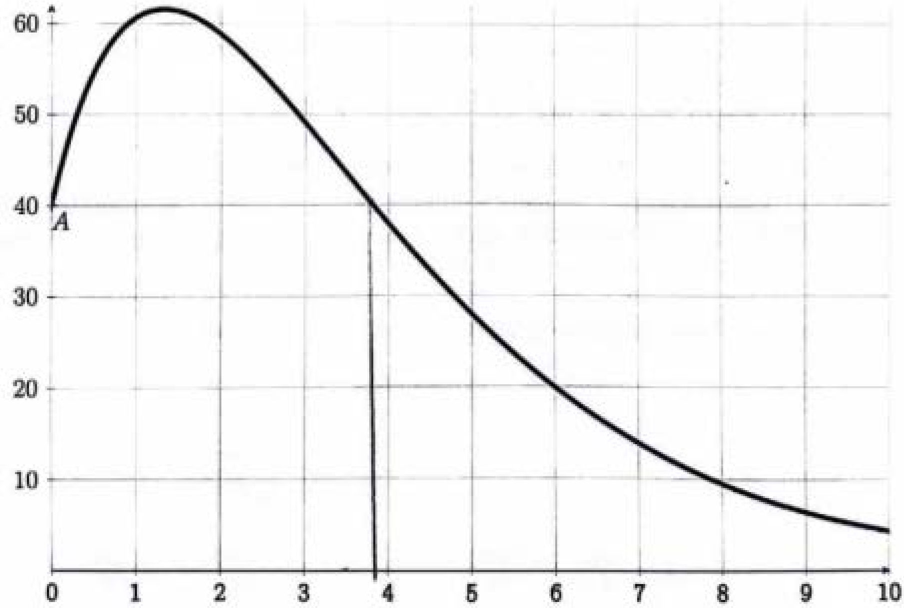
Dans un laboratoire, on étudie une réaction chimique dans un réacteur fermé, sous certaines conditions. Le traitement numérique des données expérimentales a permis de modéliser l'évolution de la température de cette réaction chimique en fonction du temps.
L'objectif de cet exercice est d'étudier cette modélisation.
La température est exprimée en degré Celsius et le temps est exprimé en minute.
Dans tout l'exercice, on se place sur l'intervalle de temps $[0\,;10]$.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un repère orthogonal du plan, on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction température en fonction du temps sur l'intervalle $[0\,;10]$.

1. Déterminer, par lecture graphique, au bout de combien de temps la température redescend à sa valeur initiale à l'instant $t = 0$.



On appelle f la fonction température représentée par la courbe ci-dessus.
On précise que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;10]$.
On admet que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(t) = (at + b)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$ où a et b sont deux constantes réelles.

2. On admet que la valeur exacte de $f(0)$ est 40. En déduire la valeur de b.
3. On admet que f vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + 0,5y = 60\,\mathrm{e}^{-0,5t}$.
   Déterminer la valeur de a.

Partie B : Étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;10]$ par

$$f(t) = (60t + 40)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$$

1. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;10]$, on a : $f'(t) = (40 - 30t)\,\mathrm{e}^{-0,5t}$.

2. (a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;10]$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les images des valeurs présentes dans le tableau.

   (b) Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive sur l'intervalle $]0\,;10]$.

   (c) Donner une valeur approchée de α au dixième près et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

3. On définit la température moyenne, exprimée en degré Celsius, de cette réaction chimique entre deux temps t_1 et t_2, exprimés en minute, par

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

   (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^4 f(t)dt = 320 - \frac{800}{\mathrm{e}^2}$$

   (b) En déduire une valeur approchée, au degré Celsius près, de la température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes.