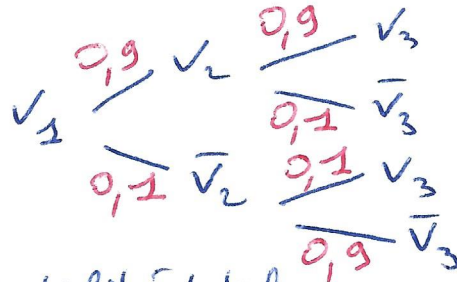


Bac Spé Maths 2025
Voici la correction complète
du jour 2
pour le sujet Polynésie
Mercredi 18 Juin 2025

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A 1) d'après l'énoncé, on a une probabilité de 0,9 si on passe de V_i à V_{i+1} ou de $\bar{V}_i$ à $\bar{V}_{i+1}$ (transmission fidèle) et une probabilité de 0,1 si on passe de V_i à $\bar{V}_{i+1}$ ou de $\bar{V}_i$ à V_{i+1} (non fidèle).
On a donc l'arbre suivant :



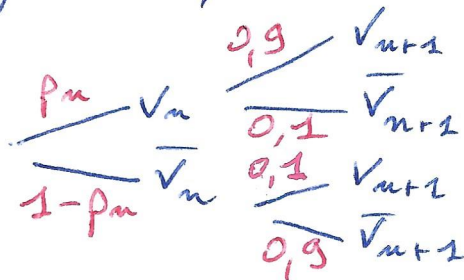
b) on utilise la formule des probabilités totales :

$$p(V_3) = p(V_3 \cap V_2) + p(V_3 \cap \bar{V}_2) \\ = 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,1 = \boxed{0,82}$$

→ probabilité de 0,82 que la 3^e machine ait bien reçu la valeur 1.

c) on cherche $p_{V_3}(V_2) = \frac{p(V_3 \cap V_2)}{p(V_3)} = \frac{0,9 \times 0,9}{0,82} \approx \boxed{0,988}$

2) a) on a ici l'arbre suivant :



et avec la formule des probabilités totales, on a :

$$p_{n+1} = p(V_{n+1}) = p(V_{n+1} \cap V_n) + p(V_{n+1} \cap \bar{V}_n) \\ = p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,1 \\ = 0,9 p_n - 0,1 p_n + 0,1 = \boxed{0,8 p_n + 0,1}$$

b) initialisation

on sait que $p_1 = \boxed{1}$

et on vérifie $p_1 = 0,5 \times 0,8^{1-1} + 0,5 \\ = 0,5 \times 1 + 0,5 = \boxed{1} \rightarrow \boxed{OK}$

Hérédité

on suppose que, pour $n \geq 1$, $p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5$
et on va montrer que l'on aura $p_{n+1} = 0,5 \times 0,8^n + 0,5$

↳ on sait que $p_{n+1} = 0,8 p_n + 0,1$
 $= 0,8 (0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5) + 0,1$
 $= 0,5 \times 0,8 \times 0,8^{n-1} + 0,8 \times 0,5 + 0,1$
 $= 0,5 \times 0,8^n + 0,41 \rightarrow \boxed{OK}$

↳ on a bien la propriété voulue, d'après le principe de récurrence.

c) on a $-1 < 0,8 < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,8)^{n-1} = 0$.

on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5 \times (0,8)^{n-1} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \boxed{0,5}$.

À terme, la probabilité que la $n^{\text{ème}}$ machine détienne la valeur 1 sera égale à $\boxed{0,5} \rightarrow \boxed{50\%}$.

Partie B 1) *attention à cette question pas du tout classique.*

La ligne 5 va tester le nombre aléatoire choisi dans un intervalle $[0; 0,1[$ d'amplitude $\boxed{0,1}$ sur un intervalle global $[0; 1[$ d'amplitude $\boxed{1}$. Le choix se fait donc avec une probabilité égale à $\frac{0,1}{1} = \boxed{0,1}$.

La ligne 6 permet alors de ¹changer la valeur de la donnée qui passe de $\boxed{1}$ à $1-1 = \boxed{0}$ ou de $\boxed{0}$ à $1-0 = \boxed{1}$.

Bilan : ces deux instructions permettent de modifier la transmission non fidèle avec sa probabilité de 0,1 et donc aussi la transmission fidèle avec sa probabilité de 0,9.

b) on va noter ici F une transmission fidèle et $\bar{F}$ une transmission non fidèle

→ simulation (4) renvoie ici 4 transmissions fidèles.

on a $\boxed{1, 1, 1, 1, 1}$

$\xrightarrow{F} \xrightarrow{F} \xrightarrow{F} \xrightarrow{F} \xrightarrow{F}$

cela correspond à $p(V_2 \wedge V_3 \wedge V_4 \wedge V_5)$

$$= 0,9 \times 0,9 \times 0,9 \times 0,9 \approx \boxed{0,656}$$

→ simulation (6) renvoie un "mélange" de transmissions

on a $\boxed{1, 0, 1, 0, 0, 1, 1}$

$\xrightarrow{\bar{F}} \xrightarrow{\bar{F}} \xrightarrow{\bar{F}} \xrightarrow{F} \xrightarrow{\bar{F}} \xrightarrow{F}$

cela correspond à $p(\bar{V}_2 \wedge \bar{V}_3 \wedge \bar{V}_4 \wedge V_5 \wedge \bar{V}_6 \wedge V_7)$

$$= 0,1 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,9 \times 0,1 \times 0,9$$

$$= (0,1)^4 \times (0,9)^2 = \boxed{0,000081}$$

$$\approx \boxed{0} \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Exercice 2

1) on peut dire, avec le graphique, que la fonction f est croissante sur $]2; +\infty[$, avec $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et avec une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

2) on résout $x \ln(x-2) = 0$

$x = 0$ ✓
mais $0 \notin]2; +\infty[$

$$\ln(x-2) = 0$$

$$x-2 = e^0 = 1$$

$$x = 3 \in]2; +\infty[$$

↳ on obtient $S = \{3\}$

3) on a $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x-2) = 0$ et donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \ln(x-2) = -\infty$

↳ on obtient donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x \ln(x-2) = \boxed{-\infty}$

résultat de la conjecture confirmée!

4) on a $f(x) = \underbrace{x}_{u} \underbrace{\ln(x-2)}_{v}$

et on obtient $f'(x) = \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{\ln(x-2)}_v + \underbrace{x}_{u} \times \underbrace{\frac{1}{x-2}}_{v'} = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}$

5) a) on a $g(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}$

et on obtient $g'(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{\underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{x-2}_v - \underbrace{x}_{u} \times \underbrace{1}_{v'}}{(x-2)^2}$

$$\text{soit } g'(x) = \frac{1 \times (x-2) + 1 \times (x-2) - x}{(x-2)^2} = \frac{x-4}{(x-2)^2}$$

b) Le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $(x-4)$.

on obtient:

on calcule
 $g(4) = \ln(4-2) + \frac{4}{4-2}$
↳ $g(4) = \ln(2) + 2$

x	2	4	$+\infty$
signe de $g'(x)$	-	0	+
variations de g	$+\infty$	$\ln(2)+2$	$+\infty$

c) on a $\ln(2) + 2 \approx 2,69 > 0$

Donc le minimum de la fonction sur $]2; +\infty[$ est strictement positif. On a donc $g(x) > 0$ sur $]2; +\infty[$.

d) on avait posé $f'(x) = g(x)$.

↳ on a donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]2; +\infty[$
et la fonction f est croissante sur $]2; +\infty[$.

e) on sait que $f'(x) = g(x)$

↳ on aura donc $f''(x) = g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}$

donc, sur $]2; 4]$, on a $f''(x) \leq 0 \rightarrow f$ sera concave.

et sur $[4; +\infty[$, on a $f''(x) \geq 0 \rightarrow f$ sera convexe.

Avec un point d'inflexion de coordonnées $(4; f(4))$

c'est à dire $(4; 4 \ln 2)$.

f) on veut résoudre l'équation $f'(x) = 3$ soit $g(x) = 3$.

Et, en reprenant le tableau de variations du 5) b), on voit que cette équation aura 2 solutions.

Pour le démontrer, il faudra appliquer deux fois le corollaire du TVI: une fois sur $]2; 4]$ et une fois sur $[4; +\infty[$.

→ la fonction $f' (= g)$ est décroissante et continue sur $]2; 4]$

on a $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = +\infty$ et $f'(4) = g(4) = \ln(2) + 2 \approx 2,69$

Donc on a bien $3 \in [\ln(2) + 2; +\infty[$ et, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f'(x) = 3$ a une unique solution sur $]2; 4]$.

→ la fonction $f' (= g)$ est croissante et continue sur $[4; +\infty[$.

on a $f'(4) = g(4) = \ln(2) + 2 \approx 2,69$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Donc on a bien $3 \in [\ln(2) + 2; +\infty[$ et, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f'(x) = 3$ a une unique solution sur $[4; +\infty[$.

→ on aura donc bien deux solutions sur $]2; +\infty[$.

Exercice 3

1) il faut montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$$\text{on a } \vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{on calcule } -1 : (-2) = 0,5 \text{ et } -2 : 1 = -2 \neq 0,5$$

→ les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires

→ les points A, B et C ne sont pas alignés

→ les points A, B et C forment un plan.

$$2) \text{ on calcule } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2) \times (-1) + 1 \times (-2) + 5 \times 0 = \boxed{0}$$

→ on a donc $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ et ABC triangle rectangle en A.

3) a) on va montrer que $\vec{u}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ (non colinéaires) du plan (ABC).

$$\text{on calcule } \vec{u} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \times (-2) + (-1) \times 1 + 1 \times 5 = \boxed{0}$$

$$\text{et } \vec{u} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 1 \times 0 = \boxed{0}$$

Donc on aura bien $\vec{u} \perp \vec{AB}$ et $\vec{u} \perp \vec{AC}$, soit $\Delta \perp (ABC)$.

b) le vecteur $\vec{u}$ est donc un vecteur normal au plan (ABC).

Ses coordonnées seront donc les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne de (ABC).

$$\text{on obtient : } \underset{a}{2}x + \underset{b}{(-1)}y + \underset{c}{1}z + d = 0 \rightarrow 2x - y + z + d = 0$$

on utilise, par exemple, le point C qui appartient à (ABC).

$$\hookrightarrow 2 \times 0 - 1 + 0 + d = 0 \rightarrow -1 + d = 0 \rightarrow d = 1$$

$$\text{et on obtient bien pnc (ABC) : } \underset{x}{2}x - \underset{y}{1}y + \underset{z}{1}z + 1 = 0$$

c) pnc Δ , on aura la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = \boxed{-2} + \boxed{2} \times k \\ y = \boxed{2} + \boxed{-1} \times k \\ z = \boxed{1} + \boxed{1} \times k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = 1 + k \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{avec} \\ k \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$\xrightarrow{\text{point } D \quad \text{vecteur directeur } \vec{u}}$

4) on vérifie ici deux conditions :

→ le vecteur $\vec{HD}$ est bien colinéaire au vecteur normal $\vec{u}$ de (ABC).

En effet, on a $\vec{HD} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \vec{HD} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \vec{u}$.

→ le point H appartient bien au plan (ABC).

En effet, on a $2 \times (-\frac{2}{3}) - (\frac{4}{3}) + \frac{5}{3} + 1 = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{5}{3} + 1 = \boxed{0}$

$x_H \rightarrow y_H \rightarrow z_H$

Donc H est bien le projeté orthogonal de D sur (ABC).

5) a) on connaît les coordonnées de $\vec{HD}$

→ on calcule $DH = \|\vec{HD}\| = \sqrt{(-\frac{4}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}}$

soit $DH = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{9}} = \boxed{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$

b) si on prend comme base le triangle (rectangle) ABC alors la hauteur relative sera DH !

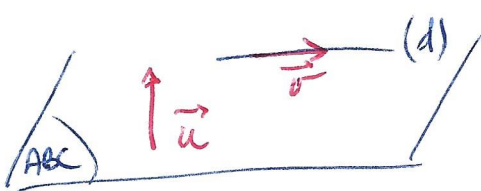
→ on a alors $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \left(\frac{AB \times AC}{2} \right) \times DH$

aire du triangle ABC

avec $AB = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{30}$ et $AC = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

on obtient $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{30} \times \sqrt{5}}{2} \right) \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \boxed{\frac{20}{3}}$

6)



on rappelle qu'une droite est parallèle à un plan si son vecteur directeur $\vec{v}$ est orthogonal au vecteur normal $\vec{u}$.

on obtient $\vec{v}$, vecteur directeur de (d), avec la représentation paramétrique de (d) → $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

et on calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \times (-2) + (-1) \times (-3) + 1 \times 1 = \boxed{0}$

Donc $\vec{u} \perp \vec{v}$ et (d) sera bien parallèle au plan (ABC).

De plus, le point $R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ de la droite (d) n'appartient pas au plan (ABC) car $2 \times 1 - 0 + 1 + 1 = 4 \neq 0$.

$x_R \rightarrow y_R \rightarrow z_R$

Donc la droite (d) est strictement parallèle au plan (ABC).

Exercice 4

1) on sait que le nombre de 3-uplets d'éléments distincts de E est égal à $7 \times 6 \times 5 = \boxed{210}$ (on aurait pu aussi utiliser un arrangement $A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5$).

et le nombre de combinaisons à 4 éléments de F sera égal à $\binom{10}{4} = \boxed{210}$

il y a bien 10 nombres dans F

→ On obtient donc le même résultat → **FAUSSE**

2) L'aire du carré ABCD est égale à $3 \times 3 = \boxed{9}$ u.a.

L'aire de la zone hachurée sera égale à $\int_0^3 x^2 dx$

$$\text{et on a } \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3}$$

→ cette aire est donc égale à $\frac{27}{3} = \boxed{9}$ u.a.

→ On obtient bien le même résultat → **VRAIE**

3) on sait, par expérience, que dans l'intégration par parties, la fonction $\ln$ sera celle à dériver.

$$\text{On pose donc : } u'(x) = x \rightarrow u(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$v(x) = \ln x \rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{et on a } J = \int_1^2 \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\ln x}_v dx = \left[\underbrace{\frac{x^2}{2}}_u \underbrace{\ln x}_v \right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{x^2}{2}}_u \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} dx$$

$$\text{c'est à dire } J = \frac{2^2}{2} \ln 2 - \frac{1^2}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx$$

$$\rightarrow J = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right)$$

$$= 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \neq \frac{7}{11}$$

→ **FAUSSE**

4) on a $f(x) = e^x + e^{2x}$ ne pas oublier
 $\hookrightarrow f'(x) = e^x + 2e^{2x}$

D'une part, on a donc $f'(x) = e^x + 2e^{2x}$

Et d'autre part, on a $2f(x) - e^x$
 $= 2(e^x + e^{2x}) - e^x$
 $= 2e^x + 2e^{2x} - e^x = e^x + 2e^{2x} = f'(x)$

$\hookrightarrow$ la fonction f est bien une solution de (E)

$\rightarrow$ VRAIE

5) on a $x \in [0; 1[$

et on a donc $(x-1) < 0$ (négatif).

On va ici encadrer la suite (U_n) .

Pour tout n , on a :

$$-1 \leq \cos n \leq 1$$

$$(x-1)e^n - 1 \leq (x-1)e^n + \cos n \leq (x-1)e^n + 1$$

On obtient donc : $U_n \leq (x-1)e^n + 1$

avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (x-1)e^n + 1 = -\infty$
car $(x-1)$ est négatif.

et, avec le théorème de comparaison, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$$

$\rightarrow$ VRAIE