

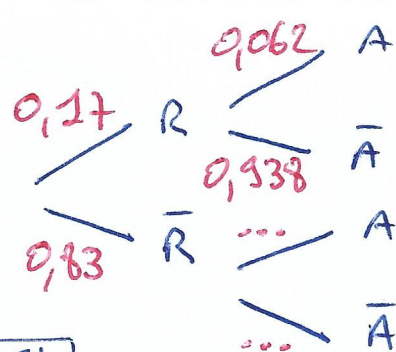
Bac Spé Maths 2025
Voici la correction complète
du jour
pour le sujet Polynésie
Mardi 17 Juin 2025

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A

1) on commence avec l'arbre suivant :



2) a) on a $p(R \cap A) = p(R) \times p_R(A)$

$$= 0,17 \times 0,062 = \boxed{0,01054}$$

b) il semblerait que l'information $p(A) = 0,09$ donnée en partie B aurait dû être mise dans la partie A !!

on utilise la formule des probabilités totales avec $p(A) = 0,09$.

$$\text{on a } p(A) = p(A \cap R) + p(\bar{R} \cap A)$$

$$\text{soit } 0,09 = 0,01054 + p(\bar{R} \cap A)$$

$$\text{soit } p(\bar{R} \cap A) = 0,09 - 0,01054 = \boxed{0,07946}$$

$$c) \text{ on cherche } p_{\bar{R}}(A) = \frac{p(\bar{R} \cap A)}{p(\bar{R})} = \frac{0,07946}{0,83} \approx \boxed{0,0957}$$

Partie B

1) on a bien ici des épreuves identiques et indépendantes avec 2 issues possibles $\rightarrow$ c'est une loi binomiale de paramètres $\boxed{n=100}$ et $\boxed{p=p(A)=0,09}$

$$2) \text{ on cherche } p(X \geq 10) = 1 - p(X \leq 9)$$

(à voir suivant votre calculatrice)

et on obtient environ $\boxed{0,4125}$

Partie C

1) La variable Π_{20} va représenter l'âge moyen d'apparition des premiers symptômes allergiques pour un échantillon de 20 enfants

2) par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(\Pi_{20}) = E\left(\frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{20}}{20}\right)$$

$$= \frac{1}{20} \left(\underset{=4}{E(A_1)} + \underset{=4}{E(A_2)} + \dots + \underset{=4}{E(A_{20})} \right) = \frac{1}{20} (4 \times 20)$$

$$\text{soit } E(\Pi_{20}) = \frac{80}{20} = \boxed{4 \text{ ans}}$$

et les variables étant indépendantes, on a:

$$V(\Pi_{20}) = V\left(\frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{20}}{20}\right)$$

$$\stackrel{!}{=} \left(\frac{1}{20}\right)^2 \left(V(A_1) + V(A_2) + \dots + V(A_{20}) \right)$$

$= 2,25 \quad = 2,25 \quad = 2,25$

on obtient $V(\Pi_{20}) = \frac{1}{20^2} \times (2,25 \times 20) = \frac{2,25}{20} = \boxed{0,1125}$

3) on s'intéresse ici à $P(2 < \Pi_{20} < 6)$

soit $P(|\Pi_{20} - 4| < 2)$

soit $P(|\Pi_{20} - E(\Pi_{20})| < 2)$.

$$= 1 - P(|\Pi_{20} - E(\Pi_{20})| \geq 2)$$

or, avec l'inégalité de Bienayme Tchebichev, on a:

$$P(|\Pi_{20} - E(\Pi_{20})| \geq 2) \leq \frac{V(\Pi_{20})}{2^2}$$

soit $P(|\Pi_{20} - E(\Pi_{20})| \geq 2) \leq \frac{0,1125}{4} = 0,028125$

on en déduit:

$$-P(|\Pi_{20} - E(\Pi_{20})| \geq 2) \geq -0,028125$$

$$\text{et } 1 - P(|\Pi_{20} - E(\Pi_{20})| \geq 2) \geq 1 - 0,028125$$

soit $P(|\Pi_{20} - E(\Pi_{20})| < 2) \geq 0,971875 > 0,97$

Bilan: on a bien l'inégalité voulue.

et on a donc une probabilité supérieure à 0,97 que l'âge moyen d'apparition des premiers symptômes soit compris entre 2 ans et 6 ans (pour une population de 20 enfants).

Exercice 2

1) le point S sera le point de la droite d_3 pour lequel on a $z=0$ soit $11-4t=0 \rightarrow t = \frac{-11}{-4} = \boxed{\frac{11}{4}}$

on aura donc le point S $\begin{cases} x = -11 + 5 \times \frac{11}{4} \\ y = -5 + \frac{11}{4} \\ z = 0 \end{cases}$ soit $S \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ -\frac{9}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$

2) a) on aura $d_A \begin{cases} x = -7 + 2 \times k \\ y = 1 + (-1) \times k \\ z = 7 + (-3) \times k \end{cases}$ soit $d_A \begin{cases} x = -7 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = 7 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

point A vecteur directeur $\vec{u}$

b) on résout le système $\begin{cases} -7 + 2k = -11 + 5t \\ 1 - k = -5 + t \\ 7 - 3k = 11 - 4t \end{cases}$

on obtient $\begin{cases} -7 + 2(6-t) = -11 + 5t \rightarrow -7t = -16 \rightarrow \boxed{t = \frac{16}{7}} \\ k = 6 - t \text{ (à l'aide de la 2^e équation)} \\ 7 - 3(6-t) = 11 - 4t \rightarrow 7t = 22 \rightarrow \boxed{t = \frac{22}{7}} \end{cases}$

$\rightarrow$ on a $\frac{16}{7} \neq \frac{22}{7}$ ce qui signifie que le système n'a pas de solutions, les droites ne sont pas sécantes et les avions ne peuvent pas entrer en collision.

3) a) on cherche k tel que $\begin{cases} x = -7 + 2k = -3 \\ y = 1 - k = -1 \\ z = 7 - 3k = 1 \end{cases}$

et ce système est bien vérifié si on prend k égal à 2, et l'avion Alpha passe bien par ce point E.

b) un vecteur directeur de d_A sera donc ici un vecteur normal au plan P_E .

on aura $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et ces coordonnées vont correspondre aux coefficients a, b et c de l'équation $ax+by+cz+d=0$.

on obtient donc $2x + (-1)y + (-3)z + d = 0 \rightarrow \boxed{2x - y - 3z + d = 0}$

mais on a $E \in P_E \Rightarrow 2x_E - y_E - 3z_E + d = 0$

$\Rightarrow -6 + 1 - 3 + d = 0 \rightarrow \boxed{d = 8}$

et on a bien pour le plan P_E : $\boxed{2x - y - 3z + 8 = 0}$

c) il suffit de vérifier que F appartient bien à P_E

$\rightarrow$ on calcule $2x_F - y_F - 3z_F + 8 = -2 + 3 - 9 + 8 = 0 \rightarrow \boxed{OK}$

et que F appartient bien à d_B

$\rightarrow$ on cherche t tel que $\begin{cases} x = -11 + 5t = -1 \\ y = -5 + t = -3 \\ z = 11 - 4t = 3 \end{cases} \rightarrow$ ce qui est vérifié pour $t = 2 \rightarrow \boxed{OK}$

Bilan

F est bien le point d'intersection entre P_E et d_B .

d) on calcule $\vec{EF} \begin{pmatrix} -1 - (-3) \\ -3 - (-1) \\ 3 - 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{EF} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

l'unité des axes correspond à 1 km

et on a donc $E.F = \|\vec{EF}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = \boxed{\sqrt{12}} \approx 3,464 \text{ km}$
 $\approx \boxed{3464 \text{ m}}$

4) on a 3 miles nautique $= 3 \times 1852 \text{ m} = \boxed{5556 \text{ m}}$

et on a $3464 \text{ m} < 5556 \text{ m}$

$\therefore$ la distance de sécurité n'est pas du tout respectée !

Exercice 3

Partie A 1) a) on a $f_n(x) = \underbrace{x^n}_{u} \underbrace{e^{-x}}_{v}$ ($n \geq 1$)

$$\text{et on a donc } f'_n(x) = \underbrace{nx^{n-1}}_{u'} \underbrace{e^{-x}}_{v} + \underbrace{x^n}_{u} \underbrace{(-e^{-x})}_{v'} \\ = e^{-x} \times x^{n-1} (n-x).$$

b) sur $[0; +\infty[$, on aura $e^{-x} > 0$ et $x^{n-1} \geq 0$.

Le signe de $f'_n(x)$ ne dépend que du signe de $(n-x)$.

↳ pour $x \leq n$, on aura bien $n-x \geq 0$

et pour $x \geq n$, on aura bien $n-x \leq 0$

$$\text{avec } f'_n(n) = e^{-n} \times n^{n-1} (n-n) = 0$$

Donc sur $[0; n]$, on a $f'_n(x) \geq 0$ et donc f_n croissante.

et sur $[n; +\infty[$, on a $f'_n(x) \leq 0$ et donc f_n décroissante.

$$\textcircled{a} \text{ on calcule } f_n(0) = 0^n \times e^{-0} = \boxed{0}$$

$$f_n(n) = n^n \times e^{-n} = \frac{n^n}{e^n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$\textcircled{b}$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ avec le théorème des croissances comparées.

$$2) \text{ on calcule } f_n(1) = 1^n \times e^{-1} = e^{-1}.$$

Donc l'image de 1 par f_n est bien égale à e^{-1} .

et le point A appartient bien à C_n .

Partie B

1) a) la fonction f_n étant bien positive sur $[0; 1]$, l'intégrale I_n va correspondre à l'aire délimitée par l'axe des abscisses, la courbe C_n et les droites verticales d'équation $x=0$ et $x=1$.

b) on peut dire que (I_n) va être décroissante avec des valeurs de plus en plus petit qui vont tendre vers zéro.

$$2) \text{ on a } I_0 = \int_0^1 \underbrace{x^0}_{=1} e^{-x} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^1$$

$$\text{et on en déduit } I_0 = -e^{-1} - (-e^{-0}) = -e^{-1} + 1 = \boxed{1 - e^{-1}}$$

$$3) a) \text{ on a } x \in [0; 1] \rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\rightarrow 0 \times x^n \leq x \times x^n \leq 1 \times x^n$$

(conservation de l'ordre car on multiplie les inégalités par x^n qui est positif !!)

Donc on a bien $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ sur $[0; 1]$.

$$b) \text{ on en déduit } \int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

$$\rightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$$

4) La suite (I_n) est donc décroissante (car $I_{n+1} \leq I_n$) et minorée par 0 (car $I_n \geq 0$).

D'après le théorème de la convergence monotone, on sait alors que (I_n) sera bien convergente, et sa limite l sera positive ou nulle car $U_n \geq 0$.
(par tout n)

$$5) \text{ on a } I_{n+1} = \int_0^1 \underbrace{x^{n+1}}_u \underbrace{e^{-x}}_{v'} dx$$

$$\hookrightarrow \text{on pose } u(x) = x^{n+1} \text{ soit } u'(x) = (n+1)x^n$$

$$\text{et } v'(x) = e^{-x} \text{ soit } v(x) = -e^{-x}$$

$$\text{on obtient } I_{n+1} = \left[\underbrace{x^{n+1}}_u \underbrace{(-e^{-x})}_v \right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{(n+1)x^n}_{u'} \underbrace{(-e^{-x})}_v dx$$

$$\hookrightarrow I_{n+1} = 1^{n+1} \times (-e^{-1}) - 0^{n+1} \times (-e^{-0}) + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

$$= -e^{-1} - 0 + (n+1) I_n$$

$$\text{soit } I_{n+1} = (n+1) I_n - e^{-1} = (n+1) I_n - \frac{1}{e}$$

6) a) on a $I_{n+1} = (n+1) I_n - \frac{1}{e}$

soit $I_{n+1} = n I_n + I_n - \frac{1}{e}$

et on peut écrire $n I_n = I_{n+1} - I_n + \frac{1}{e}$

or on sait que (I_n) est convergente avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = l$

on aura donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_{n+1} - I_n + \frac{1}{e}) = \boxed{\frac{1}{e}}$

mais si on suppose $l > 0$, on aurait $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = \boxed{+\infty}$

→ il y a donc une contradiction.

b) on ne peut donc pas avoir $l > 0$.

→ on aura donc $\boxed{l \leq 0}$

Mais on sait aussi, avec la question 4, que $\boxed{l \geq 0}$.

et la seule possibilité est donc $\boxed{l = 0}$.

7) Le script commence avec la valeur $I_0 = 1 - \frac{1}{e}$ et il va effectuer 100 boucles dans lesquelles il passera d'un terme de la suite (I_n) au terme suivant, en rangeant les résultats dans une liste.

donc la fonction mystere(100) va renvoyer la liste des valeurs $I_0, I_1, \dots$ jusqu'à I_{100} .

Exercice 4

1) les solutions de (E) seront données par la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation homogène (E₀) : $y' = \frac{1}{2}y$.

pour (E₀) : $y' = \frac{1}{2}y$, on sait, d'après le cours, que les solutions seront de la forme $x \rightarrow ke^{\frac{1}{2}x}$, $k \in \mathbb{R}$.

pour une solution particulière de (E), on prend $f(x) = -8$
 $\rightarrow f'(x) = 0$ et on a bien $f'(x) = \frac{1}{2}f(x) + 4$.

Donc les solutions de (E) s'écrivent bien sous la forme

$$x \rightarrow ke^{\frac{1}{2}x} + (-8), k \in \mathbb{R}$$

$$\text{soit } x \rightarrow ke^{\frac{1}{2}x} - 8, k \in \mathbb{R} \rightarrow \boxed{\text{VRAIE}}$$

2) il n'y a pas de notion d'ordre ou de répétition ici.

on choisit 3 filles parmi les 18 filles $\rightarrow \binom{18}{3} = 816$

et on choisit 3 garçons les 14 garçons $\rightarrow \binom{14}{3} = 364$

le nombre total de possibilités sera égal à :

$$\binom{18}{3} \times \binom{14}{3} = 816 \times 364 = 297024 \rightarrow \boxed{\text{VRAIE}}$$

3) on sait que, pour tout n , on aura :

$$-1 \leq \cos n \leq 1$$

$$\text{soit } -1 \leq 2 - 1 \leq 2 + \cos n \leq 2 + 1 = 3$$

et, en prenant l'inverse (qui va inverser l'ordre),

$$\text{on obtient } \frac{1}{1} \geq \frac{1}{2 + \cos n} \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{c'est à dire } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \cos n} \leq 1$$

$$\text{et donc } \frac{n}{3} \leq \frac{n}{2 + \cos n} \leq n$$

On a donc $\sqrt[n]{n} \geq \frac{n}{3}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3} = +\infty$

et avec le théorème de comparaison, on a bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \boxed{+\infty} \rightarrow \boxed{\text{VRAIE}}$$

4) on calcule $\vec{AB} \begin{pmatrix} 5-1 \\ -1-1 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

on a donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times 1 + (-2) \times 0 + 6 \times 1 = \boxed{10} \rightarrow \boxed{\text{OK}}$

on calcule $AB = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 4 + 36} = \sqrt{56}$

et $AC = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$

On en déduit $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 10$

soit $\sqrt{56} \times \sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC}) = 10$

et on obtient $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{56} \times \sqrt{2}}\right) \approx \boxed{19^\circ} \neq 30^\circ$

$\rightarrow \boxed{\text{FAUSSE}}$

5) on a $h''(x) = x \ln x - 3x$
 $= x(\ln x - 3)$

sur $]0; +\infty[$, le signe de $h''(x)$ ne dépend que du signe de $(\ln x - 3)$ car on a $x > 0$.

on résout $\ln x - 3 = 0 \rightarrow \ln x = 3 \rightarrow x = e^3$

on aura le tableau de signes suivant

x	0	e^3	$+\infty$
signe de $h''(x)$		- 0 +	

si $x > e^3$ on aura $\ln x > 3$
et $\ln x - 3 > 0$

Donc sur $[e^3; +\infty[$, on a $h''(x) \geq 0$

et la fonction h sera bien convexe !! $\rightarrow \boxed{\text{VRAIE}}$