Exercice 4

Partie A

1) sous forme décimale, on obtient :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0,375	0,25	0,15625

on a $U_3 = u_2 - \frac{1}{4}U_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

2) il semble bien que la suite tende vers zéro !

Partie B

1) on a $W_0 = U_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \boxed{\frac{1}{2}}$

2) on a $W_{n+1} = U_{n+2} - \frac{1}{2}U_{n+1}$

$= U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n - \frac{1}{2}U_{n+1}$

on en déduit $W_{n+1} = \frac{1}{2}U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n = \frac{1}{2}\left(U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n\right) = \boxed{\frac{1}{2}W_n}$

et (W_n) est bien une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3) on a $W_n = W_0 \times q^{(n-0)} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

4) on sait que $W_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$

et on en déduit $U_{n+1} = W_n + \frac{1}{2}U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}U_n$

5) <u>initialisation</u>

on sait que $U_0 = 0$

et on vérifie bien $U_0 = 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0$.

↳ la formule est vérifiée au rang 0.

<u>Hérédité</u>

on suppose que l'on a $U_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

et on veut montrer $U_{n+1} = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

c'est une récurrence de type 2 sur ce site (voir les fiches concernées) → on veut démontrer une formule.

on part donc de $U_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} U_n$ on remplace U_n avec l'hypothèse de récurrence.

et on obtient $U_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

soit $U_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+1) \rightarrow \boxed{OK}$

↳ on a bien le résultat souhaité avec le principe de récurrence.

Partie C

1) on calcule $U_{n+1} - U_n = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}(n+1) - n\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}(1-n)$$

et on a donc $U_{n+1} - U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(1-n)$

avec $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$ pour tout n et $(1-n) \leq 0$ pour $n \geq 1$

Donc on a $U_{n+1} - U_n \leq 0$ à partir du rang 1

↳ (U_n) est décroissante à partir du rang 1.

2) on a $U_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$ pour tout n.

La suite (U_n) est donc minorée par 0 et elle est décroissante → d'après le théorème de la convergence monotone, on en déduit que (U_n) converge.

3) en partant de $U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4} U_n$,

on obtiendrait $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$

On résout $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell \rightarrow -\frac{1}{4}\ell = 0 \rightarrow \ell = \boxed{0}$

et on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \boxed{0}$.