Exercice 1

Partie A

1) $\boxed{\text{en } -\infty}$, il n'y a pas de forme indéterminée

on a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$

on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} (\underbrace{x e^{-x}}_{\underbrace{(-\infty)\times(+\infty)}_{-\infty}} + \underbrace{2x}_{-\infty} - 1) = \boxed{-\infty}$ (par somme des limites)

$\boxed{\text{en } +\infty}$, on doit utiliser les croissances comparées car il y a une forme indéterminée pour xe^{-x} !

↳ avec les croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$

on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} (\underbrace{x e^{-x}}_{0} + \underbrace{2x}_{+\infty} - 1) = \boxed{+\infty}$ (par somme des limites)

2) on a $f(x) = \underbrace{x}_{u} \times \underbrace{e^{-x}}_{v} + 2x - 1$

et on obtient $f'(x) = \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{e^{-x}}_{v} + \underbrace{x}_{u} \times \underbrace{(-e^{-x})}_{v'} + 2$ dérivée de $2x-1$

soit $\boxed{f'(x) = e^{-x}(1-x) + 2}$

3) on a $f'(x) = \underbrace{e^{-x}}_{u} \times \underbrace{(1 - x)}_{v} + 2$

et on obtient $f''(x) = \underbrace{-e^{-x}}_{u'} \times \underbrace{(1-x)}_{v} + \underbrace{e^{-x}}_{u} \times \underbrace{(-1)}_{v'}$

soit $f''(x) = e^{-x}(-1 + x - 1) = \boxed{e^{-x}(x-2)}$.

4) on étudie le signe de $f''(x)$.

↳ on obtient

x	$-\infty$		2		$+\infty$
e^{-x}		$+$		$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
fonction f		CONCAVE		CONVEXE	

point d'inflexion.

Donc la fonction f est concave sur $]-\infty ; 2]$ et convexe sur $[2 ; +\infty[$.

5) Le signe de $f''(x)$ va nous donner les variations de la fonction f'.

On obtient

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'		$\searrow$	$2-e^{-2}$	$\nearrow$	

on calcule la valeur du minimum

$f'(2) = e^{-2}(1-2)+2 = -e^{-2}+2 = 2-e^{-2}$.

6) Le minimum de f' est égal à $2-e^{-2}$ qui est strictement positif $\rightarrow$ f' sera donc strictement positive sur $\mathbb{R}$

et f sera donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

7) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;+\infty[$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et on a $0 \in]-\infty;+\infty[$.

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Donc, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique sur $]-\infty;+\infty[$.

$\hookrightarrow$ avec la calculatrice, on obtient : $0,37 < \alpha < 0,38$

8) on s'intéresse à $f(x)-y$

$= xe^{-x}+2x-1-(2x-1) = xe^{-x}$

avec $e^{-x} > 0$ pour tout x.

Donc $f(x)-y \leq 0$ pour $x \leq 0$

et $f(x)-y \geq 0$ pour $x \geq 0$

Donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de Δ pour $x \leq 0$

et $\mathcal{C}_f$ est au dessus de Δ pour $x \geq 0$.

Partie B

1) On a $I_n = \int_1^n \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{-x}}_{v'}\,dx$ → on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$
on a $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$

↳ on obtient $I_n = \left[\underbrace{x}_{u}\underbrace{(-e^{-x})}_{v}\right]_1^n - \int_1^n \underbrace{1}_{u'}\times\underbrace{(-e^{-x})}_{v}\,dx$

soit $I_n = n(-e^{-n}) - 1\times(-e^{-1}) + \int_1^n e^{-x}\,dx$

$= -ne^{-n} + e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_1^n$

$= -ne^{-n} + e^{-1} + (-e^{-n}) - (-e^{-1})$

$= -ne^{-n} - e^{-n} + 2e^{-1}$

2) a) Les bornes 1 et n du domaine D_n sont incluses dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ dans lequel on sait que $\mathcal{C}_f$ est bien au dessus de Δ.

Donc on a bien Aire $D_n = \int_1^n (f(x) - y)\,dx = \int_1^n xe^{-x}\,dx = I_n$.

b) on a donc Aire $D_n = -ne^{-n} - e^{-n} + 2e^{-1}$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-n} = 0$ (par croissances comparées)

et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$.

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}$ Aire $D_n = \boxed{2e^{-1}} = \boxed{\dfrac{2}{e}}$