BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (6 points)

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B. Au 1er janvier 2025, on introduit 6 000 individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.
On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $0{,}93$. Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.
On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par $v_0 = 6$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -0{,}05{v_n}^2 + 1{,}1v_n$.
Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$.

2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 11]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.
4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.
5. a. Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ.
   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.
3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.
4. On considère le programme Python ci-contre.
   a. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.
   b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

```
n = 0
u = 6
v = 6
while ... :
    u = ...
    v = ...
    n = n + 1
print(2025 + n)
```

Exercice 2 (6 points)

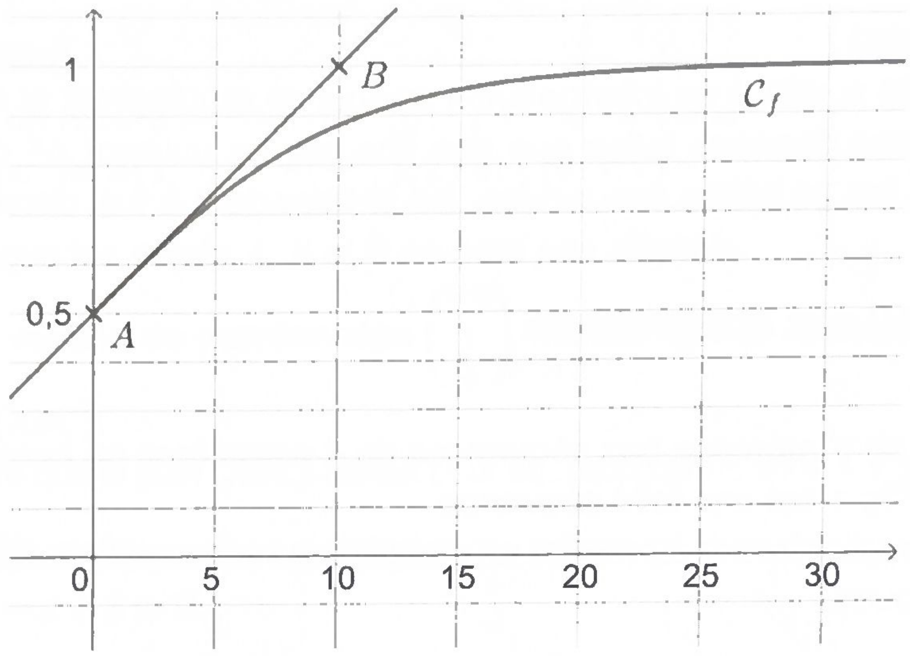
Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{a + \mathrm{e}^{-bx}}$$

où a et b sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
La fonction f admet pour représentation graphique la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :



On considère les points $A(0; 0{,}5)$ et $B(10; 1)$.
On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée de $f(10)$.
2. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
3. Justifier que $a = 1$.
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
5. **a.** Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de la constante b.
   b. En déduire la valeur de b.

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-0{,}2x}}$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0{,}97$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel α par deux nombres entiers consécutifs.

Partie C

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(x)=\frac{e^{0,2x}}{1+e^{0,2x}}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;40]$, c'est-à-dire :
$$I=\frac{1}{40}\int_0^{40}\frac{1}{1+e^{-0,2x}}\,\mathrm{d}x$$
On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.

__Exercice 3__ **(4 points)**

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64.
Par exemple, « gP3g » est une telle séquence.
Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3. **a.** Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule
   b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
   c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
   d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Partie B

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre. On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à 0,01 et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis. *On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.*
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable » ?

Partie C

On s'intéresse maintenant à la transmission de 4 séquences de 250 caractères.
On note X_1, X_2, X_3 et X_4 les variables aléatoires correspondant aux nombres de caractères mal transmis lors de la transmission de chacune des 4 séquences. On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes entre elles et suivent la même loi que la variable aléatoire X définie en **partie B**.
On note $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Déterminer, en justifiant, l'espérance et la variance de la variable aléatoire S.

Exercice 4 (4 points)

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace.
On considère les points $A(1; 0; 3)$, $B(-2; 1; 2)$ et $C(0; 3; 2)$.

1. **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).
   c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $-x + y + 4z - 11 = 0$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x - 3y + 2z - 9 = 0$ et le plan $\mathcal{P}'$ d'équation cartésienne $x - y - z + 2 = 0$.

2. **a.** Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants. On note (d) leur droite d'intersection.
   b. Déterminer si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.
3. Montrer que la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que le point $M(2; 1; 3)$ appartient aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
   En déduire une représentation paramétrique de la droite (d).
5. Montrer que la droite (d) est aussi incluse dans le plan (ABC).
   Que peut-on dire des trois plans (ABC), $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$?