Baccalauréat Polynésie 18 juin 2025

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée

Exercice 1 — 5 points

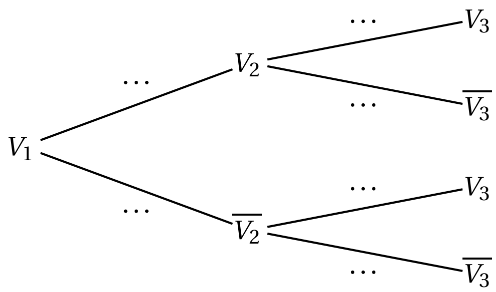
Dans tout l'exercice, les probabilités seront, si nécessaire, arrondies à 10^{-3} près.
Une donnée binaire est une donnée qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.
Une donnée de ce type est transmise successivement d'une machine à une autre.
Chaque machine transmet la donnée reçue soit de manière fidèle, c'est-à-dire en transmettant l'information telle qu'elle l'a reçue (1 devient 1 et 0 devient 0), soit de façon contraire (1 devient 0 et 0 et devient 1).
La transmission est fidèle dans 90 % des cas, et donc contraire dans 10 % des cas.
Dans tout l'exercice, la première machine reçoit toujours la valeur 1.

Partie A

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

- V_n l'évènement : « la n-ième machine détient la valeur 1 » ;
- $\overline{V_n}$ l'évènement : « la n-ième machine détient la valeur 0 ».

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



   b. Démontrer que $P(V_3) = 0,82$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

   c. Sachant que la troisième machine a reçu la valeur 1, calculer la probabilité que la deuxième machine ait aussi reçu la valeur 1.

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note $p_n = P(V_n)$.
   La première machine a reçu la valeur 1, on a donc $p_1 = 1$.

   a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1.$$

   b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5.$$

   c. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Pour modéliser en langage Python la transmission de la donnée binaire décrite en début d'exercice, on considère la fonction `simulation` qui prend en paramètre un entier naturel n qui représente le nombre de transmissions réalisées d'une machine à une autre, et qui renvoie la liste des valeurs successives de la donnée binaire.
On donne ci-dessous le script incomplet de cette fonction.
On rappelle que l'instruction `rand()` renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0\,;\,1[$.

```
1   def simulation(n):
2       donnee = 1
3       liste = [donnee]
4       for k in range(n):
5           if rand() <0.1
6               donnee = 1 - donnee
7           liste.append(donnee)
9       return liste
```

Par exemple, `simulation(3)` peut renvoyer [1, 0, 0, 1].Cette liste traduit :

- qu'une donnée binaire a été successivement transmise trois fois entre quatre machines ;
- la première machine qui détient la valeur 1 a transmis de façon contraire cette donnée à la deuxième machine ;
- la deuxième machine a transmis la donnée qu'elle détient de façon fidèle à la troisième ;
- la troisième machine a transmis de façon contraire la donnée qu'elle détient à la quatrième.

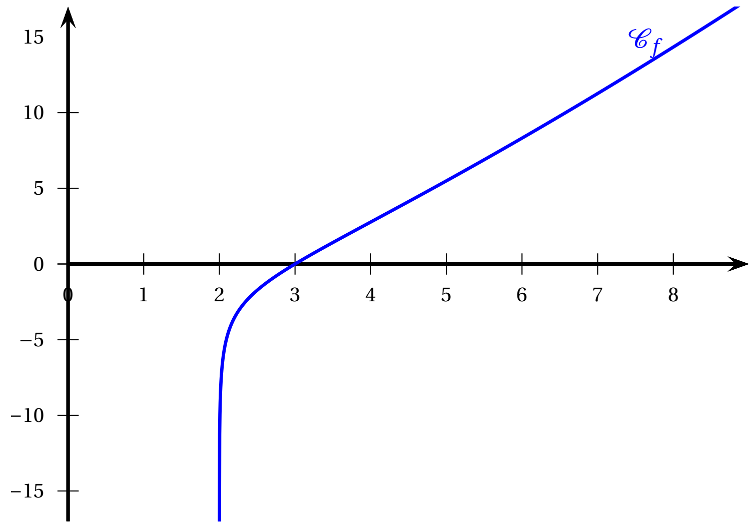
1. Déterminer le rôle des instructions des lignes 5 et 6 de l'algorithme ci-dessus.
2. Calculer la probabilité que simulation(4) renvoie la liste [1, 1, 1, 1, 1] et la probabilité que `simulation(6)` renvoie la liste [1, 0, 1, 0, 0, 1, 1].

Exercice 2 — 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x-2).$$

Une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2\,;\,+\infty[$.

3. Calculer $\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$.
Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1. ?

4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}.$$

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]]2\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.

a. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

b. On admet que $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2\,;\,+\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g.

c. En déduire que, pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.

d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$.

6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 ?

Exercice 3 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère les points suivants :

$$\mathrm{A}(1\,;3\,;0),\quad \mathrm{B}(-1\,;4\,;5),\quad \mathrm{C}(0\,;1\,;0)\quad \text{et}\quad \mathrm{D}(-2\,;2\,;1).$$

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

3. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

b. Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$2x - y + z + 1 = 0.$$

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. On appelle H le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}\ \frac{4}{3}\,;\,\frac{5}{3}\right)$.
Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}B \times h$, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est sa hauteur relative à cette base.

a. Montrer que $\mathrm{DH} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

b. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

6. On considère la droite d de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-2k\\ y &=& -3k\\ z &=& 1+\ \ k\end{array}\right. \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

La droite d et le plan eABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 4 **5 points**

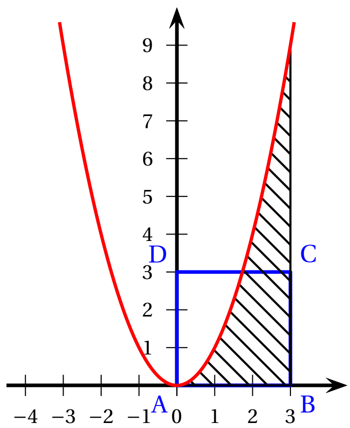
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soient E et F les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Affirmation n° 1 : Il y a davantage de 3-uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F.

2. Dans le repère orthonormé ci-contre, on a représenté la fonction carré, notée f, ainsi que le carré ABCD de côté 3.

Affirmation n° 2 : La zone hachurée et le carré ABCD ont la même aire.



2. On considère l'intégrale J ci-dessous :

$$J = \int_1^2 x \ln(x)\, \mathrm{d}x.$$

Affirmation nº 3 : Une intégration par parties permet d'obtenir : $J = \dfrac{7}{11}$.

3. Sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$E) : \quad y' = 2y - \mathrm{e}^{\cdot}$$

Affirmation nº 4 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$ est solution de l'équation différentielle (E).

4. Soit x donné dans $[0 ; 1[$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (x-1)\mathrm{e}^n + \cos(n).$$

Affirmation nº 5 : La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.