Exercice 4

1) a) on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$

et on a $-1:(-3)=\frac{1}{3}$ et $3:1=3\neq\frac{1}{3}$

$\rightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

$\rightarrow$ les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) on a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-1\times(-3)+1\times1+4\times(-1)=3+1-4=\boxed{0}$

et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-1\times(-1)+1\times3+4\times(-1)=1+3-4=\boxed{0}$

donc $\vec{n}$ est bien orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC)

$\rightarrow$ c'est donc bien un vecteur normal à (ABC).

c) les coordonnées de $\vec{n}$ seront les coefficients a, b et c de l'équation $ax+by+cz+d=0$.

$\rightarrow$ on obtient $-1x+1y+4z+d=0 \rightarrow -x+y+4z+d=0$

or $A\in(ABC)$ donc on a $\underbrace{-1}_{x_A}+\underbrace{0}_{y_A}+4\times\underbrace{3}_{z_A}+d=0 \rightarrow d=-11$

et on obtient bien $\boxed{-x+y+4z-11=0}$

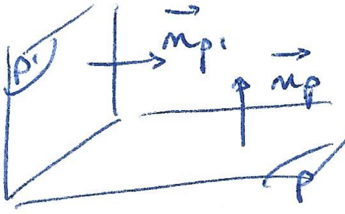
2) a) Des vecteurs normaux aux plans P et P' seront respectivement $\vec{n}_P\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_{P'}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

et on a $1:3=\frac{1}{3}$; $-1:(-3)=\frac{1}{3}$ et $-1:2=-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{3}$

$\rightarrow$ ces vecteurs ne sont pas colinéaires

$\rightarrow$ les plans ne sont pas parallèles $\rightarrow$ ils sont sécants.

b) on calcule $\vec{n}_P\cdot\vec{n}_{P'}=3\times1+(-3)\times(-1)+2\times(-1)$
$=4\neq0$



donc on n'a pas $\vec{n}_P\perp\vec{n}_{P'}$

et les plans ne sont pas perpendiculaires.

3) on cherche à résoudre le système $\begin{cases} 3x-3y+2z-9=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$

↳ on fixe, par exemple, $\boxed{x=t}$ avec $t\in\mathbb{R}$.

on obtient $\begin{cases} -3y+2z=9-3t \\ -y-z=-2-t \quad \times 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -3y+2z=9-3t \\ -3y-3z=-6-3t \end{cases}$

et, par soustraction des deux égalités, on a $5z=15$

soit $\boxed{z=3}$ et en remplaçant z par 3,

on obtient $-3y+2\times3=9-3t \longrightarrow -3y=3-3t$

$\longrightarrow \boxed{y=-1+t}$

↳ on obtient $\begin{cases} x=t \\ y=-1+t \\ z=3 \end{cases}$ qui est dirigé par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4) on vérifie que $3\times2-3\times1+2\times3-9=12-12=\boxed{0}$

et $2-1-3+2=4-4=\boxed{0}$

donc on a bien $\Pi\in P$ et $\Pi\in P'$

et on aura pour (d) $\begin{cases} x=2+1t=2+t \\ y=1+1t=1+t \\ z=3+0t=3 \end{cases}$

5) on calcule

$-(2+t)+(1+t)+4\times(3)-11$

$=-2-t+1+t+12-11=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$

et donc la droite (d) est incluse dans le plan (ABC)

et, donc,

les trois plans (ABC), P et P' sont tous les trois sécants et la droite (d) est leur droite d'intersection.