Exercice 3

Partie A

1) il y a 64 possibilités pour chacun des 4 caractères

→ $\boxed{64} \times \boxed{64} \times \boxed{64} \times \boxed{64} = 64^4 = \boxed{16\ 777\ 216}$

2) on a ici un arrangement de 4 caractères pris parmi 64.

↳ $A_4^{64} = \dfrac{64!}{(64-4)!} = \dfrac{64!}{60!} = 64 \times 63 \times 62 \times 61 = \boxed{15\ 249\ 024}$

3) a) il n'y a plus que 63 possibilités pour chacun des 4 caractères → $63^4 = \boxed{15\ 752\ 961}$

b) on cherche le "contraire" du a)

→ on calcule $\underbrace{16\ 777\ 216}_{\text{total}} - \underbrace{15\ 752\ 961}_{\text{pas de lettre A}} = \underbrace{\boxed{1\ 024\ 255}}_{\text{au moins une lettre A}}$

c) il y a 4 possibilités pour placer la lettre A

et on choisit les 3 autres caractères parmi les 63 caractères restants (sachant qu'il y a toujours répétition possible et que l'ordre est pris en compte)

→ $4 \times 63 \times 63 \times 63 = \boxed{1\ 000\ 188}$

d) voici les façons possibles pour placer ces 2 lettres A.

☐☐AA ou ☐A☐A ou A☐☐A ou A☐A☐

ou AA☐☐ ou ☐AA☐ → 6 possibilités

et on choisit ensuite les 2 autres caractères parmi les 63 caractères restants (autres que le A).

→ $6 \times 63 \times 63 = \boxed{23\ 814}$

Partie B

1) on a $n = 250$ et $p = 0{,}01$

2) La variable X correspond au nombre de caractères mal transmis

↳ on cherche donc ici $P(X=0) = \binom{250}{0} p^0 (1-p)^{250-0}$

aucun n'est mal transmis

soit $P(X=0) = 1 \times 1 \times 0{,}99^{250} \approx \boxed{0{,}081}$.

3) on a $p(X > 16) = p(X \geq 17) \approx \boxed{1{,}04 \times 10^{-9}}$

↳ cela peut être considéré comme négligeable.

Partie C

pour chacune des variables X_i, on aura :

$E(X_i) = n \times p = 250 \times 0{,}01 = \boxed{2{,}5}$ caractères mal transmis.

$V(X_i) = n \times p \times (1-p) = 250 \times 0{,}01 \times 0{,}99 = \boxed{2{,}475}$

par linéarité de l'espérance, on aura :

$$\begin{aligned} E(S) &= E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) \\ &= 4 \times 2{,}5 = \boxed{10} \text{ caractères mal transmis} \end{aligned}$$

et puisque les variables sont indépendantes, on aura :

$$\begin{aligned} V(S) &= V(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + V(X_4) \\ &= 4 \times 2{,}475 = \boxed{9{,}9} \end{aligned}$$