

Exercice 2

Partie A 1) on a $f(10)$ légèrement inférieur à 0,9 $\rightarrow \boxed{\approx 0,88}$

2) on a une asymptote horizontale d'équation $\boxed{y=1}$

3) on a $f(0) = \frac{1}{a+e^{-b \times 0}} = \frac{1}{a+1}$ et, avec le point A, on a

$$f(0) = 0,5 \rightarrow \text{on aura } \frac{1}{a+1} = 0,5 \rightarrow 1 = 0,5a + 0,5 \rightarrow \boxed{a=1}$$

4) on a $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 0,5}{10 - 0} = \frac{0,5}{10} = \boxed{0,05}$

5) a) on a $f'(x) = \frac{-(-be^{-bx})}{(a + e^{-bx})^2}$ on applique $(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$

soit $f'(x) = \frac{be^{-bx}}{(1 + e^{-bx})^2}$

b) on sait que $f'(0) = 0,05 \rightarrow \frac{be^{-b \times 0}}{(1 + e^{-b \times 0})^2} = 0,05$

soit $\frac{b}{(1+1)^2} = 0,05 \rightarrow b = 0,05 \times 4 = \boxed{b=0,2}$

Partie B 1) on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -0,2x = -\infty$

$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,2x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{1}$

2) on a $f'(x) = \frac{-(-0,2e^{-0,2x})}{(1 + e^{-0,2x})^2} = \frac{0,2e^{-0,2x}}{(1 + e^{-0,2x})^2} > 0$

on applique $(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$

$\hookrightarrow$ on a donc $f'(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$
et f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$

3) f est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$

on a $f(0) = \frac{1}{2} = 0,5$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{1}$

$\hookrightarrow$ on a donc 0,97 qui appartient à l'intervalle $[0,5; 1]$

et, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0,97$ possède une unique solution sur $[0; +\infty[$.

4) avec la calculatrice, on obtient $f(17) \approx 0,9677$
et $f(18) \approx 0,9734$

→ on a donc $\boxed{17 < \alpha < 18}$

Partie C 1) on a $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-0,2x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^{0,2x}}} = \frac{1}{\frac{e^{0,2x} + 1}{e^{0,2x}}}$
et on obtient $f(x) = \frac{e^{0,2x}}{e^{0,2x} + 1}$.

2) on a $(\ln(1 + e^{0,2x}))' = \frac{1}{1 + e^{0,2x}} \times 0,2e^{0,2x} = \frac{0,2e^{0,2x}}{1 + e^{0,2x}}$

→ il faut juste gérer ce coefficient 0,2 !!

→ une primitive de f sera donc $\boxed{\frac{1}{0,2} \ln(1 + e^{0,2x})}$

3) on a $I = \frac{1}{40} \int_0^{40} f(x) dx = \frac{1}{40} (F(40) - F(0))$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow I &= \frac{1}{40} \left(\frac{1}{0,2} \ln(1 + e^{0,2 \times 40}) - \frac{1}{0,2} \ln(1 + e^{0,2 \times 0}) \right) \\ &= \frac{1}{8} (\ln(1 + e^8) - \ln(2)) \approx \boxed{0,913} \end{aligned}$$