Exercice 1

Partie A 1) on cherche $U_1 = 0,93 \times U_0 = 0,93 \times 6 = \boxed{5,58}$ ↳ 5580 individus.

2) on a $U_n = U_0 \times q^{(n-0)} = 6 \times 0,93^n$

3) on a $-1 < 0,93 < 0,93 \rightarrow \lim_{n \to +\infty} (0,93)^n = 0 \rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = \boxed{0}$

et, avec ce modèle, à terme, la population se rapprochera de zéro, soit d'une population nulle.

Partie B 1) on a $v_1 = -0,05\, v_0^2 + 1,1\, v_0$
$= -0,05 \times 6^2 + 1,1 \times 6 = \boxed{4,8} \rightarrow 4800$ individus

2) on a $f'(x) = -0,05 \times 2x + 1,1 = -0,1x + 1,1$

sur $[0;11]$, on a $0 \leq x \leq 11$

soit $0 \geq -0,1x \geq -1,1$

soit $1,1 \geq -0,1x + 1,1 \geq 0$

donc $f'(x) \geq 0$

↳ on a $f'(x) \geq 0$ sur $[0;11] \rightarrow f$ est croissante sur $[0;11]$.

3) initialisation on a $v_0 = 6$ et $v_1 = 4,8$

donc on a bien $2 \leq v_1 \leq v_0 \leq 6 \rightarrow \boxed{\text{OK}}$

hérédité

on suppose $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$

et on aura $f(2) \leq f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \leq f(6)$

car f est croissante sur $[0;11]$
et elle conserve l'ordre

on obtient donc : $2 \leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 4,8 \; (\leq 6)$

et on a bien les inégalités voulues !!

4) on a (v_n) qui est décroissante (car $v_{n+1} \leq v_n$)

et qui est minorée (par 2) (car $v_n \geq 2$).

donc (v_n) est convergente d'après le théorème de la convergence monotone.

5) a) on a $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f continue et (U_n) qui converge $\to$ d'après le théorème du point fixe, la limite l de la suite (U_n) vérifiera $\boxed{l = f(l)}$

soit $-0{,}05l^2 + 1{,}1l = l \iff -0{,}05l^2 + 0{,}1l = 0$

$\iff l(-0{,}05l + 0{,}1) = 0$

soit $l = 0$ ou $l = \dfrac{0{,}1}{0{,}05} = 2$

$l = 0$ est impossible ici car on a $v_n \geq 2$

Donc la limite de la suite est $\boxed{l = 2}$

b) à terme, la population se rapprochera de 2000 individus.

Partie C

1) on cherche à résoudre $6 \times 0{,}93^n < 3$

$\iff 0{,}93 < 0{,}5 \iff n \ln 0{,}93 < \ln 0{,}5$

soit $n > \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}93}$ (on a divisé par $\ln 0{,}93$ qui est négatif)

$\approx 9{,}55$

$\to$ à partir de la 10e année, soit à partir de $\boxed{2035}$.

2) avec la calculatrice, on a $v_5 \approx 3{,}14$

$v_6 \approx 2{,}96$

$\to$ à partir de la 6e année, soit à partir de $\boxed{2031}$.

3) La suite (U_n) va converger vers 0 alors que (v_n) va converger vers 2 (avec $v_n \geq 2$ pour tout n).

Il y aura forcément une année à partir de laquelle on aura $U_n \leq v_n$ (et (U_n) est bien décroissante !)

4) a)

```
while v <= u
    u = 0,93*u
    v = -0,05*v*v + 1,1*v
```

b) en affichant les deux suites sur la calculatrice, on obtient $n = 13$ soit $\boxed{2038}$