Exercice 4

Partie A

1) La fonction h est constante $\rightarrow h'(t) = 0$

et on a bien $h'(t) + 0{,}48h(t) = 0 + 0{,}48 \times \frac{1}{250} = \frac{1}{120}$.

$\rightarrow$ h est bien une solution de (E_1)

2) on a $y' = -0{,}48y$ $\rightarrow$ les solutions sont donc de la forme $Ke^{-0{,}48t}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

3) L'ensemble des solutions de (E_1) est donné par la somme d'une solution particulière de (E_1) et de la solution générale de l'équation homogène.

On obtient : $t \rightarrow Ke^{-0{,}48t} + \frac{1}{120}$, avec $K \in \mathbb{R}$

Partie B

1) on a $p(t) = \frac{1}{y(t)}$ $\rightarrow p'(t) = \frac{-y'(t)}{y^2(t)}$

$\hookrightarrow$ si p est solution de (E_2) alors on a $p' = \frac{1}{250}p(120 - p)$

c'est à dire $-\frac{y'(t)}{y^2(t)} = \frac{1}{250} \times \frac{1}{y(t)}\left(120 - \frac{1}{y(t)}\right)$

soit $-y'(t) = \frac{1}{250} \frac{y^{\cancel{2}}(t)}{\cancel{y(t)}}\left(120 - \frac{1}{y(t)}\right)$

on obtient $-y'(t) = \underbrace{\frac{120}{250}}_{=0{,}48} y(t) - \frac{1}{250}\frac{\cancel{y(t)}}{\cancel{y(t)}}$

c'est à dire $y'(t) + 0{,}48y(t) = \frac{1}{250}$

$\Rightarrow$ alors on a bien y solution de (E_1)

2) on considère une solution y strictement positive de (E_1)

$\hookrightarrow$ on a $y(t) = Ce^{-0{,}48t} + \frac{1}{120}$ (avec C réel positif par exemple)

on sait que $p(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{Ce^{-0{,}48t} + \frac{1}{120}} = \frac{120}{\underbrace{120C}_{}e^{-0{,}48t} + 1}$

on note K cette constante

et on obtient bien $p(t) = \dfrac{120}{1+Ke^{-0,48t}}$, $K \in \mathbb{R}$.

3) on veut $p(0) = 30$

or on a $p(0) = \dfrac{120}{1+\underbrace{Ke^{-0,48\times 0}}_{e^{-0}=1}} = \dfrac{120}{1+K}$ → on veut $\dfrac{120}{1+K} = 30$

et on obtient $120 = 30(1+K)$ → $120 = 30 + 30K$

→ $K = \dfrac{90}{30} = \boxed{3}$

4) on a $\lim\limits_{t\to+\infty} (-0,48t) = -\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,48t} = 0$

et $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = 120$ $\left(\dfrac{120}{1+0}\right)$

→ à terme, la population de bactéries se stabilisera et se rapprochera de 120 000 bactéries

5) on veut résoudre $p(t) > 60$

soit $\dfrac{120}{1+3e^{-0,48t}} > 60$

$\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$

soit $1+3e^{-0,48t} < 2$

soit $e^{-0,48t} < \dfrac{1}{3}$ → $\ln(e^{-0,48t}) < \ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$

la fonction ln est croissante et elle conserve l'ordre

on obtient $-0,48t < -\ln 3$

soit $t > \dfrac{-\ln 3}{-0,48}$ (on a divisé par un nombre négatif)

↳ ce résultat est en heure, on le multiplie par 60 pour obtenir un résultat en minutes

on obtient $t > 137$ (min)

soit $t > 2h17min$.