Exercice 3

Partie A 1) en -1, on a $(x+1)$ qui tend vers 0^+

et donc $\lim\limits_{x \to -1} \ln(x+1) = -\infty$

et on obtient donc $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \boxed{-\infty}$

2) on a $f'(x) = 4 \times \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2x}{25} = \dfrac{4 \times 25 - 2x(x+1)}{25(x+1)}$

soit $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 100}{25(x+1)}$

3) on a $x \in]-1;+\infty[$ donc on a $x+1 > 0$

↳ le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $(-2x^2 - 2x + 100)$

↳ $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 100 = 804 > 0$

donc il y a deux racines $x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{804}}{-4}$ et $x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{804}}{-4}$

$\approx 6,6$ $\approx -7,6$

$\notin]-1;+\infty[$

On a donc le tableau suivant :

x	-1		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

or l'intervalle $[2;6,5]$ est inclus dans l'intervalle $]-1;x_1]$

et la fonction est donc bien croissante sur $[2;6,5]$.

4) on a $h(2) = f(2) - 2 \approx 2,23$

et $h(6,5) = f(6,5) - 6,5 \approx -0,7$

Donc l'équation $h(x) = 0$ ne peut pas avoir de solution

sur $[2;m]$ (la fonction est strictement positive ici)

et la fonction h est continue et décroissante sur $[m;6,5]$

on a $h(m) = M > 0$

et $h(6,5) \approx -0,7 < 0$

Donc 0 appartient à l'intervalle image $[h(6,5);h(m)]$

D'après le corollaire du TVI, l'équation $h(x)=0$ a une solution unique sur l'intervalle $[m ; 6,5]$.

5) a) on obtiendra ici un intervalle d'amplitude 10^{-2} centré sur la solution α de l'équation $h(x)=0$

↳ on obtiendra ici $(6.36, 6.37)$

b) On en déduit donc l'encadrement $6,36 < \alpha < 6,37$

Partie B 1) initialisation on a $U_0 = 2$

et $U_1 = f(U_0) = f(2) \simeq 4,23$

Donc on a bien $2 \leq U_0 \leq U_1 \leq 6,5$

Hérédité : on suppose $2 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 6,5$

on applique la fonction croissante f qui va donc conserver l'ordre

$$f(2) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(6,5)$$

$$2 \leq \underbrace{f(2)}_{\simeq 4,23} \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq \underbrace{f(6,5)}_{\simeq 5,8} \leq 6,5$$

→ on a bien $2 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 6,5$.

2) La suite (U_n) est croissante (car $U_n \leq U_{n+1}$) et majorée par $6,5$ (car $U_n \leq 6,5$) → elle converge !!

(théorème de la convergence monotone)

3) on a $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f continue sur $[2 ; 6,5]$.

et d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ de (U_n) va vérifier l'équation $\ell = f(\ell)$.

soit $f(\ell) - \ell = 0$ ou $h(\ell) = 0$

et α étant l'unique solution possible,

on aura $\boxed{\ell = \alpha}$.