Exercice 4

Partie A

1) on voit que l'on obtient à nouveau une ordonnée égale à 40 pour une abscisse environ égale à 3,8.

2) on a $f(0) = (a \times 0 + b)\underbrace{e^{-0,5\times 0}}_{=1} = 40 \rightarrow \boxed{b = 40}$

3) on calcule $f'(t) = \underbrace{a}_{u'} \times \underbrace{e^{-0,5t}}_{v} + \underbrace{(at+b)}_{u} \times \underbrace{(-0,5e^{-0,5t})}_{v'}$

soit $f'(t) = e^{-0,5t}(-0,5at + a - 0,5b)$

↳ on a donc $f'(t) + 0,5f(t)$ (et on remplace b par 40)

$= e^{-0,5t}(\cancel{-0,5at} + a - 20) + 0,5(\cancel{at} + 40)e^{-0,5t}$

$= e^{-0,5t}(a)$ et on veut $f'(t) + 0,5f(t) = 60e^{-0,5t}$

donc on aura $\boxed{a = 60}$

Partie B

1) on peut reprendre l'expression de $f'(t)$ de la partie A et on remplace a par 60 et b par 40.

↳ $f'(t) = e^{-0,5t}(-0,5\times 60t + 60 - 0,5\times 40)$

$= e^{-0,5t}(-30t + 40)$.

2) a) Le signe de $f'(t)$ ne dépend que du signe de l'expression $-30t + 40$

$-30t + 40 = 0$
$\rightarrow t = \frac{4}{3}$

on obtient :

x	0		$\frac{4}{3}$		10
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
variations de f	40	↗	$120e^{-\frac{2}{3}}$	↘	$640e^{-5}$

b) sur l'intervalle $]0 ; \frac{4}{3}]$, l'équation $f(t) = 40$ n'a pas de solution puisque $f(0) = 40$ et que la fonction est ensuite strictement croissante.

sur $[\frac{4}{3};10]$, la fonction f est continue et décroissante.

on a $f(\frac{4}{3}) = 120e^{-\frac{2}{3}} \approx 61{,}6$

et $f(10) = 640e^{-5} \approx 4{,}3$

$\rightsquigarrow$ on a bien $40 \in [f(10); f(\frac{4}{3})]$

et, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=40$ a une unique solution sur $[\frac{4}{3};10]$, et donc sur $]0;10]$.

c) on obtient $\alpha \approx 3{,}8$ et la température redevient bien égale à la température initiale de 40°C au bout de (environ) 3,8 minutes.

3) a) on a $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,dt = \int_0^4 (\underbrace{60t+40}_{u}) \times \underbrace{e^{-0{,}5t}}_{v'}\,dt$

$$= \left[\underbrace{(60t+40)}_{u} \times \underbrace{\frac{e^{-0{,}5t}}{-0{,}5}}_{v}\right]_0^4 - \int_0^4 \underbrace{60}_{u'} \times \underbrace{\frac{e^{-0{,}5t}}{-0{,}5}}_{v}\,dt$$

$$= (-560e^{-2} - (-80)) + 120\int_0^4 e^{-0{,}5t}\,dt$$

$$= (-560e^{-2} + 80) + 120\left[\frac{e^{-0{,}5t}}{-0{,}5}\right]_0^4$$

$$= (-560e^{-2} + 80) + 120\left(\frac{e^{-2}}{-0{,}5} - \frac{e^{-0}}{-0{,}5}\right)$$

$$= (-560e^{-2} + 80) - 240e^{-2} + 240 = 320 - 800e^{-2}$$

$$= \boxed{320 - \frac{800}{e^2}}$$

b) La température moyenne sera égale à :

$$\frac{1}{4-0} \times \int_0^4 f(t)\,dt = \frac{1}{4}\left(320 - \frac{800}{e^2}\right) = \boxed{80 - \frac{200}{e^2}}$$

$$\approx \boxed{53°}$$