Exercice 2

Partie A

1) on a $U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 10 = \frac{1}{2}\times 30 + 10 = \boxed{25}$

et $U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 10 = \frac{1}{2}\times 25 + 10 = \boxed{22{,}5}$

2) on a $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 10$ et on a $V_n = U_n - 20$

$\hookrightarrow U_n = V_n + 20$

on a donc $V_{n+1} = U_{n+1} - 20$

$= \frac{1}{2}U_n + 10 - 20 = \frac{1}{2}(V_n + 20) + 10 - 20$

$\rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + \underbrace{\frac{1}{2}\times 20 + 10 - 20}_{=0} = \boxed{\frac{1}{2}V_n}$

$\rightarrow$ suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme

$V_0 = U_0 - 20 = 30 - 20 = 10$.

3) on a $V_n = V_0 \times q^{(n-0)} = 10\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

4) on sait que $U_n = V_n + 20 \rightarrow U_n = 10\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 20$

5) on a $-1 < \frac{1}{2} < 1 \rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \boxed{20}$

Partie B

1) on a $W_1 = \frac{1}{2}W_0 + \frac{1}{2}U_0 + 7$

$= \frac{1}{2}\times 45 + \frac{1}{2}\times 30 + 7 = \boxed{44{,}5}$

2) il suffit d'intervertir les lignes 5 et 6 du script afin de ne pas calculer le terme "suivant" de la suite (U_n) avant d'avoir calculer le terme de la suite (W_n).

3) a) <u>init</u> on a $w_0 = \boxed{45}$

et on vérifie $w_0 = \underbrace{10 \times 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0}_{=0} + 11\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^0}_{=1} + 34 = \boxed{45}$ → $\boxed{\text{OK}}$

<u>hérédité</u>

on suppose $w_n = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$

et on a $w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n + \frac{1}{2} v_n + 7$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{10n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34}_{\substack{w_n \\ \text{(hypothèse de récurrence)}}}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\underbrace{20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\substack{v_n \\ \text{(partie A)}}}\Big) + 7$$

on obtient $w_{n+1} = 10n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 17 + 10 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 7$

$$= 10(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 34$$

et c'est ce qu'il fallait obtenir !

on a bien l'égalité prouvée avec le principe de récurrence.

b) on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{10}{n} = 0$ → d'après le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 10n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 11\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \boxed{34}$

↳ la suite (w_n) est convergente et sa limite est $\boxed{34}$.