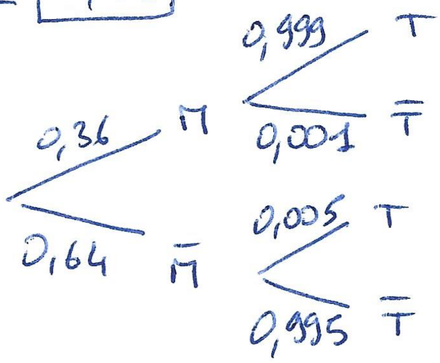
Exercice 1

Partie A

1) on a $p_M(T) = \boxed{0{,}999}$ et $p_{\bar{M}}(T) = \boxed{0{,}005}$

2) on a $p(M) = \dfrac{270\,000}{750\,000} = \boxed{0{,}36}$

3) on a donc l'arbre suivant



4) on a $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T)$
$= 0{,}36 \times 0{,}999 = \boxed{0{,}360}$

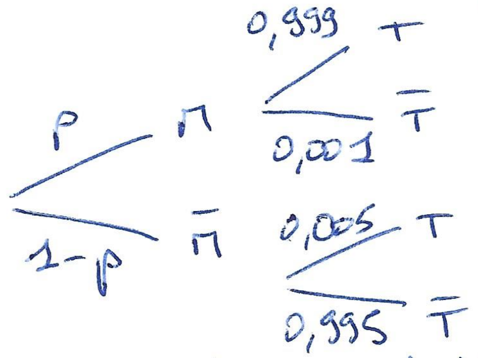
5) avec la formule des probabilités totales, on a :
$p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T)$
$= 0{,}360 + 0{,}64 \times 0{,}005 = \boxed{0{,}363}$

6) on cherche $p_T(M) = \dfrac{p(T \cap M)}{p(T)} = \dfrac{0{,}360}{0{,}363} \simeq \boxed{0{,}992}$

7) si le test est positif, il y a donc 99,2% de "chances" que la personne soit bien malade → cela paraît bien fiable !
$(0{,}992 > 0{,}95)$

Partie B

1) on aura



2) en appliquant à nouveau la formule des probabilités totales, on a : $p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T)$
$= p \times 0{,}999 + (1-p) \times 0{,}005$
$= 0{,}994\,p + 0{,}005$

3) on a $p_T(M) = \dfrac{p(T \cap M)}{p(T)} = \dfrac{0{,}999\,p}{0{,}994\,p + 0{,}005} \xrightarrow[\times 1000]{\times 1000} = \dfrac{999\,p}{994\,p + 5}$

4) on veut $p_T(M) > 0,95 \hookrightarrow \dfrac{999p}{994p+5} > 0,95$

soit $999p > 944,3p + 4,75 \hookrightarrow p > \underbrace{\dfrac{4,75}{54,7}}_{0,087}$

Donc le test sera fiable dès que l'on a $p > 0,087$.

Partie C

on cherche n tel que $p(X \geq 1) > 0,99$

$$= 1 - p(X=0)$$
$$= 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^{n-0}$$

$\hookrightarrow$ on a donc $p(X \geq 1) = 1 - 0,64^n$

et l'inégalité à résoudre s'écrit donc :

$$1 - 0,64^n > 0,99$$

soit $0,64^n < 0,01$

soit $\ln(0,64^n) < \ln(0,01)$ la fonction ln est croissante et conserve l'ordre.

soit $n \times \ln 0,64 < \ln(0,01)$

soit $n > \underbrace{\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,64)}}_{\approx 10,32}$ (on a divisé par $\ln(0,64)$ qui est négatif)

$\hookrightarrow$ on aura le résultat souhaité à partir de 11 individus.