Exercice 4

1) a) avec la formule $(e^u)' = e^u \times u'$,

on obtient $\left(e^{\sqrt{x}}\right)' = e^{\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = f(x)$

b) on applique la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

↳ on a $f'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\cancel{2\sqrt{x}}}\right) \times \cancel{2\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} \times \cancel{2} \times \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \dfrac{e^{\sqrt{x}} - \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x}$

↳ on obtient $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}$

2) a) on a $\dfrac{e^{\sqrt{x}} \to 1}{2\sqrt{x} \to 0}$ → limite du type $\dfrac{1}{0}$ → $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \boxed{+\infty}$

b) asymptote verticale d'équation $x = 0$.

3) a) On a une forme indéterminée qui se règle avec les croissances comparées → $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \boxed{+\infty}$

b) le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $(\sqrt{x} - 1)$

↳ on résout $\sqrt{x} - 1 = 0$ → $\sqrt{x} = 1$ → $x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(1) = \dfrac{e^{\sqrt{1}}}{2\sqrt{1}} = \boxed{\dfrac{e}{2}}$	↗	$+\infty$

c) sur $[1; +\infty[$, f est continue et strictement croissante

on a $f(1) = \dfrac{e}{2} \approx \boxed{1,36}$ → le nombre 2 appartient bien

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$ à l'intervalle image $\left[\dfrac{e}{2}; +\infty\right[$

Donc, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution sur $[1; +\infty[$.

et on a $\boxed{4{,}6 < \alpha < 4{,}7}$

4) a) on a $I = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx = \left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^2 = e^{\sqrt{2}} - e^1$

$e^{\sqrt{x}}$ est une primitive de $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

car $(e^{\sqrt{x}})' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

b) L'aire du domaine délimité par les droites $x=1$ et $x=2$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_f$ est égale à $\boxed{e^{\sqrt{2}} - e}$

5) a) le signe de $f''(x)$ ne dépend que du signe de l'expression $x - 3\sqrt{x} + 3$

↳ on pose $X = \sqrt{x}$ ($X^2 = (\sqrt{x})^2 = x$) et on obtient le trinôme $X^2 - 3X + 3$.

on résout $X^2 - 3X + 3 = 0 \to \Delta = (-3)^2 - 4\times 1 \times 3$
$= -3 < 0$

→ il n'y aucune racine

→ le trinôme a un signe constant (qui sera positif ici).

Donc, pour tout X, on a $X^2 - 3X + 3 > 0$

et donc on aura, pour tout $x \in]0;+\infty[$,
$x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$.

b) Le signe de $f''(x)$ ne dépendant que du signe de $x - 3\sqrt{x} + 3$, on en déduit que :

$f''(x) > 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$

↳ la fonction f est $\boxed{\text{convexe}}$ sur $]0;+\infty[$.