Exercice 3

Partie A 1) $U_2 = 2 + 0{,}8 \times U_1 = 2 + 0{,}8 \times 2 = \boxed{3{,}6}$

2) <u>init</u> $U_1 = \boxed{2}$ et $U_1 = 10 - 8 \times 0{,}8^{1-1} = 10 - 8 \times 0{,}8^0$
$= 10 - 8 \times 1 = \boxed{2} \rightarrow \boxed{OK}$

<u>Hérédité</u> on suppose $U_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$

on veut montrer $U_{n+1} = 10 - 8 \times 0{,}8^{n+1-1} = 10 - 8 \times 0{,}8^n$

or on a $U_{n+1} = 2 + 0{,}8 \times U_n$

$= 2 + 0{,}8 \times (10 - 8 \times 0{,}8^{n-1})$

$= 2 + 8 - 8 \times 0{,}8 \times 0{,}8^{n-1} = 10 - 8 \times 0{,}8^n \rightarrow \boxed{OK}$

3) on a $0 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}8)^{n-1} = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n) = \boxed{10}$

$\hookrightarrow$ à terme, la quantité de médicament se rapprochera de 10 mL.

4) on veut résoudre $10 - 8 \times 0{,}8^{N-1} \geq 10$

soit $-8 \times 0{,}8^{N-1} \geq 0$ ce qui est impossible.

Donc la quantité de médicament ne dépassera jamais 10 mL.

5) on veut résoudre $U_n > 9$

soit $10 - 8 \times 0{,}8^{n-1} > 9$

soit $8 \times 0{,}8^{n-1} < 1 \rightarrow 0{,}8^{n-1} < \frac{1}{8}$

$\rightarrow \ln(0{,}8)^{n-1} < \underbrace{\ln(1/8)}_{= -\ln 8}$

$\rightarrow (n-1)\ln(0{,}8) < -\ln 8$

$\rightarrow n - 1 > \dfrac{-\ln 8}{\ln(0{,}8)}$ on divise par un nombre négatif

on obtient $\dfrac{-\ln 8}{\ln(0{,}8)} \simeq 9{,}32$

on veut donc $n - 1 \geq 10$ soit $\boxed{n \geq 11} \rightarrow$ à partir de la 11e prise.

Partie B

1) on a $S_2 = \dfrac{U_1 + U_2}{2} = \dfrac{2+3,6}{2} = \boxed{2,8}$

2) on a $U_1+U_2+\dots+U_n = 10 - 8\times 0,8^{1-1}$
$+ 10 - 8\times 0,8^{2-1}$
$+ \dots$
$+ 10 - 8\times 0,8^{n-1}$

il y a "n" termes.

soit $U_1+U_2+\dots+U_n = 10\times n - 8\,(0,8^0 + 0,8^1 + \dots + 0,8^{n-1})$

somme de termes d'une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $0,8^0 = 1$

$\rightarrow U_1+U_2+\dots+U_n = 10n - 8\times\left(1\times \dfrac{1-0,8^n}{1-0,8}\right)$

$= 10n - \dfrac{8}{0,2}(1-0,8^n) = 10n - 40(1-0,8^n)$

$\rightarrow$ on a bien $U_1+U_2+\dots+U_n = \boxed{10n - 40 + 40\times 0,8^n}$

3) on a $S_n = \dfrac{10n - 40 + 40\times 0,8^n}{n} = \dfrac{\cancel{n}\left(10 - \frac{40}{n} + \frac{40\times 0,8^n}{n}\right)}{\cancel{n}}$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{40}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{40\times 0,8^n}{n} = 0$

$\hookrightarrow$ on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \boxed{10}$

4) La valeur renvoyée ici correspond au nombre de prise du médicament à partir duquel la quantité moyenne de médicament sera supérieur ou égal à 9 mL.

5) on calcule $S_{10} = \dfrac{U_1+U_2+\dots+U_{10}}{10} = \dfrac{10\times 10 - 40 + 40\times 0,8^{10}}{10}$

$\simeq 6,43$

or la suite (S_n) est croissante.
donc avant le rang 10, on aura $S_n < 6,43$
et pour dépasser 10 mL, il faudra que le rang dépasse 10.