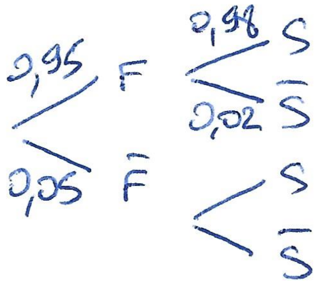
Exercice 2

Partie A

1) $p(F) = 0{,}95$ et $p_F(S) = 0{,}98$

2) a)



et on a $p(\bar{F} \cap \bar{S}) = 0{,}01$

b) on cherche $p_{\bar{F}}(\bar{S}) = \dfrac{p(\bar{F} \cap \bar{S})}{p(\bar{F})} = \dfrac{0{,}01}{0{,}05} = \boxed{0{,}2}$

3) on cherche $p(F \cap S) = p(F) \times p_F(S) = 0{,}95 \times 0{,}98 = \boxed{0{,}931}$

4) proba totales $\rightarrow$ $p(S) = p(S \cap F) + p(S \cap \bar{F})$

$= 0{,}931 + p(\bar{F}) \times p_{\bar{F}}(S)$

$= 1 - p_{\bar{F}}(\bar{S})$
$= 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

$\rightarrow p(S) = 0{,}931 + 0{,}05 \times 0{,}8 \approx \boxed{0{,}97}$

5) on cherche $p_S(F) = \dfrac{p(S \cap F)}{p(S)} = \dfrac{0{,}931}{0{,}97} \approx \boxed{0{,}96}$

Partie B

1) on a $E(S_n) = n \times p = \boxed{0{,}95n}$

et $V(S_n) = np(1-p) = 0{,}95n \times 0{,}05 = \boxed{0{,}0475n}$

2) a) on utilise la calculatrice avec $n = 150$ et $p = 0{,}95$

↳ $p(S_{150} = 145) \boxed{\approx 0{,}1088}$

↳ sur 150 jouets, la probabilité d'avoir exactement 145 jouets ayant réussi le test de fabrication est de 10,88%.

b) 94% de 150 jouets $= 0{,}94 \times 150 = 141$ jouets

↳ on cherche $p(S_{150} \geq 141)$ et on obtient $\boxed{\approx 0{,}781}$

3) a) on a $E(f_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E(S_n) = \frac{0,95n}{n} = \boxed{0,95}$

et $V(f_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{0,0475n}{n^2} = \boxed{\frac{0,0475}{n}}$

b) on veut $P(\,|f_n - \underbrace{E(f_n)}_{0,95}| < 0,02\,) \geq 0,96$

et on a $P(\,|f_n - E(f_n)| < 0,02) = 1 - P(\,|f_n - E(f_n)| \geq 0,02)$
et avec l'inégalité de Bienaymé Tchebichev, on sait que

$$P(\,|f_n - E(f_n)| \geq 0,02) \leq \frac{V(f_n)}{0,02^2}$$

soit $1 - P(\,|f_n - E(f_n)| \geq 0,02) \geq 1 - \frac{V(f_n)}{0,02^2}$

on veut donc $1 - \frac{V(f_n)}{0,02^2} \geq 0,96$

soit $1 - \frac{0,0475}{0,02^2 \times n} \geq 0,96$

soit $\frac{0,0475}{0,02^2\, n} \leq 0,04 \rightarrow n \geq \frac{0,0475}{0,02^2 \times 0,04}$

$= 2968,75$

et on a la condition voulue à partir d'un lot de 2969 jouets.