

Exercice 1

AFFIRMATION 1 $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{AC} \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$

on a $1 : (\alpha-1) \neq 0$ et $0 : 2 = 0$
donc vecteurs non colinéaires pour tout α
donc points non alignés donc c'est un plan.

et on calcule $\vec{AB} \cdot \vec{j} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = \boxed{0}$

$\vec{AC} \cdot \vec{j} = (\alpha-1) \times 0 + 2 \times 1 + \alpha \times 0 = \boxed{2} \neq 0$

donc $\vec{j}$ n'est pas normal au plan $\rightarrow \boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 2

on a $\vec{AC} \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_d \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

il n'y aura colinéarité que si $\vec{AC} = \vec{v}_d$ (à cause du 2)

et on veut donc $\alpha-1=1$ soit $\alpha=2$
et $\alpha=-1$ et $\alpha=-1$ impossible

$\rightarrow \boxed{\text{FAUSSE}}$

AFFIRMATION 3

on calcule $\vec{AO} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \times 1 + (-1) \times 0 + 0 \times 0 = \boxed{-1}$

et on a $\vec{AO} \cdot \vec{AB} = AO \times AB \times \cos(\widehat{OAB})$

avec $AO = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

et $AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$

on a donc $\vec{AO} \cdot \vec{AB} = -1 = \sqrt{2} \times 1 \times \cos(\widehat{OAB})$

soit $\cos(\widehat{OAB}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \widehat{OAB} = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
 $= 135^\circ$

$\rightarrow \boxed{\text{VRAIE}}$

AFFIRMATION 4

Le point H appartient-il à la droite (d).

$$\hookrightarrow \text{on cherche } t \text{ tel que } \begin{cases} 1+t=1 \rightarrow t=0 \\ 2t=2 \rightarrow t=1 \\ -t=2 \rightarrow t=-2 \end{cases} \Bigg) \underline{\underline{\text{impossible}}}$$

Donc $H \notin (d) \rightarrow H$ ne peut pas être le projeté orthogonal de A sur (d) $\rightarrow$ FAUSSE

AFFIRMATION 5

Les points appartenant à la sphère vérifient :

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 1$$

$$\text{soit } x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$\hookrightarrow$ on cherche l'intersection avec (d), c'est à dire

$$(1+t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2 = 1$$

$$\text{soit } t^2 + 2t + 1 + 4t^2 + t^2 = 1 \rightarrow 6t^2 + 2t = 0$$

$$\rightarrow t(6t+2) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{t=0} \text{ ou } 6t+2=0$$

$$\boxed{t = -\frac{1}{3}}$$

$\hookrightarrow$ il y a deux valeurs du paramètre t
ce qui donne bien deux points distincts.

$$\rightarrow \boxed{\text{VRAIE}}$$