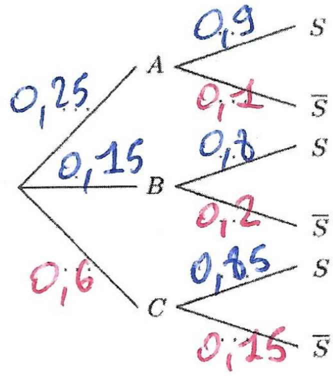
Exercice 1

Partie A

1) on obtient l'arbre suivant



on a, par exemple,

$P(C) = 1 - (0{,}25 + 0{,}15) = 0{,}6$

et $P_A(\overline{S}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

2) on calcule $p(S \cap B) = p(B) \times p_B(S)$

$= 0{,}15 \times 0{,}8 = \boxed{0{,}12}$

3) on calcule $p(C \cap \overline{S}) = p(C) \times p_C(\overline{S}) = 0{,}6 \times 0{,}15 = \boxed{0{,}09}$

↳ la probabilité que la connexion soit instable et passe par le serveur C est égale à 0,09, soit 9%.

4) on utilise la formule des probabilités totales

$$p(S) = p(S \cap A) + p(S \cap B) + p(S \cap C)$$
$$= 0{,}25 \times 0{,}9 + 0{,}15 \times 0{,}8 + 0{,}6 \times 0{,}85$$
$$= \boxed{0{,}855}$$

5) on cherche $p_S(B) = \dfrac{p(S \cap B)}{p(S)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}855} \approx \boxed{0{,}140}$

Partie B

1) a) on a $n = 50$ et $p = p(\overline{S}) = 0{,}145$

b) on s'intéresse à $p(X \leq 8)$ et, avec la calculatrice,

au plus 8

on a $p(X \leq 8) \approx \boxed{0{,}704}$

2) a) on s'intéresse ici à $p(X \geq 1)$

au moins 1

↳ on a $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0)$

$$= 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{p^0}_{=1} \times (1-p)^{n-0}$$

$$= 1 - (1 - 0{,}145)^n = \boxed{1 - (0{,}855)^n}$$

b) on cherche $p(X \geq 1) \geq 0{,}99$

↳ on résout l'inéquation $1 - (0{,}855)^n \geq 0{,}99$

soit $0{,}855^n \leq 0{,}01$

1 − 0,99

on applique la fonction ln qui conserve l'ordre car elle est croissante sur $]0;+\infty[$.

on obtient $\ln 0{,}855^n < \ln 0{,}01$

$n \times \ln 0{,}855 \leq \ln 0{,}01$

$\hookrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}855} \approx 29{,}4$

on a divisé par ln 0,855 qui est négatif

Donc on aura la condition voulue à partir de $\boxed{30}$ connexions.

3) a) Par linéarité de l'espérance, on aura :

$$E(F_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X_n) = \frac{1}{n} \times np$$

espérance d'une loi binomiale

$\hookrightarrow E(F_n) = p = \boxed{0{,}145}$

b) on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev.

On a $P(|F_n - E(F_n)| \geq 0{,}1) \leq \dfrac{V(F_n)}{0{,}1^2}$

soit $P(|F_n - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \dfrac{\frac{0{,}123975}{n}}{0{,}01}$

soit $P(|F_n - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \dfrac{12{,}3975}{n} \leq \dfrac{12{,}5}{n}$

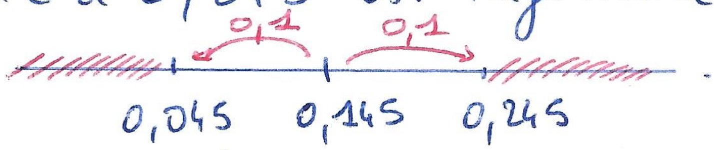
c) En appliquant le résultat de la question b,

on obtient $P(|F_{1000} - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \dfrac{12{,}5}{1000}$

soit $P(|F_{1000} - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq 0{,}0125$ ou 1,25%

or l'inégalité $|F_{1000} - 0{,}145| \geq 0{,}1$ signifie que l'écart entre F_{1000} et 0,145 est supérieur ou égal à 0,1,

Donc la probabilité que F_n soit inférieur à 0,045 ou supérieur à 0,245 est inférieure à 0,0125.



et, donc, en obtenant $F_{1000} = 0{,}3$ avec $0{,}3 \notin [0{,}045 ; 0{,}245]$, il a raison de soupçonner un dysfonctionnement.