Exercice 4

Partie A 1) a) on a $f(x) = \underbrace{e^x}_{u} \times \underbrace{\sin x}_{v}$

et on obtient $f'(x) = \underbrace{e^x}_{u'} \times \underbrace{\sin x}_{v} + \underbrace{e^x}_{u} \times \underbrace{\cos x}_{v'}$

c'est à dire $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$.

b) sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin x \geqslant 0$ et $\cos x \geqslant 0$.

et on peut même affirmer que sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, $\underbrace{\sin x > 0 \text{ et } \cos x > 0}$

avec $\sin(0) + \cos(0) = 1 \neq 0$ — et donc $(\sin x + \cos x) > 0$

et $\sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0$

Donc, puisque pour tout x, on a $e^x > 0$, on peut en conclure que $f'(x) > 0$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$.

2) a) on aura $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

avec $f'(0) = e^0(\sin(0) + \cos(0)) = 1 \times (0+1) = 1$.

et $f(0) = e^0 \sin(0) = 1 \times 0 = 0$.

on obtient $y = 1(x-0) + 0$ soit $\boxed{y = x}$

b) on a $f'(x) = \underbrace{e^x}_{u} \times \underbrace{(\sin x + \cos x)}_{v}$

et on obtient $f''(x) = \underbrace{e^x}_{u'} \times \underbrace{(\sin x + \cos x)}_{v} + \underbrace{e^x}_{u} \times \underbrace{(\cos x - \sin x)}_{v'}$

soit $f''(x) = e^x(\cancel{\sin x} + \cos x + \cos x - \cancel{\sin x})$

$= 2e^x \cos x$

$\hookrightarrow$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, on a, bien sûr, $e^x > 0$

et on aura aussi $\cos x \geqslant 0$.

on en déduit :

x	0		$\pi/2$
$f''(x)$		$+$	0
f		CONVEXE	

car $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

c) La fonction f étant convexe sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, sa courbe sera au dessus de ses tangentes et, donc, au dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = x$.

on en déduit : $f(x) \geq x$ sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$

c'est à dire $\boxed{e^x \sin(x) \geq x}$ sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

c) on a $f''(\frac{\pi}{2}) = 0$ car $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

et sur $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$, on aura $\cos(x) \leq 0 \rightarrow f''(x) \leq 0$.

Donc la dérivée seconde f'' change de signe sur $[0 ; \pi]$ en s'annulant en $\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ on a alors un point d'inflexion en $\frac{\pi}{2}$.

Partie B

1) calcul n°1

on a $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{e^x}_{u'} \times \underbrace{\sin x}_{v}$ avec $u'(x) = e^x \rightarrow u(x) = e^x$
$v(x) = \sin x \rightarrow v'(x) = \cos x$

$$= [\underbrace{e^x}_{u} \times \underbrace{\sin x}_{v}]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^x}_{u} \times \underbrace{\cos x}_{v'} dx$$

$$= e^{\pi/2} \times \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} - e^0 \times \underbrace{\sin 0}_{=0} - J$$

et on a bien $\boxed{I = e^{\pi/2} - J}$

calcul n°2

on a $I = \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^x}_{u} \times \underbrace{\sin x}_{v'}$ avec $u(x) = e^x \rightarrow u'(x) = e^x$
$v'(x) = \sin x \rightarrow v(x) = -\cos x$

$$= [\underbrace{e^x}_{u} \times \underbrace{(-\cos x)}_{v}]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^x}_{u'} \times \underbrace{(-\cos x)}_{v} dx$$

$$= e^{\pi/2} \times \underbrace{(-\cos \frac{\pi}{2})}_{=0} - e^0 \times \underbrace{(-\cos 0)}_{=1} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx$$

et on a bien $\boxed{I = 1 + J}$

2) on a $I = 1 + J$ c'est à dire $J = I - 1$

et on a $I = e^{\pi/2} - J = e^{\pi/2} - (I - 1) = e^{\pi/2} - I + 1$

on obtient $2I = e^{\pi/2} + 1$ soit $\boxed{I = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}}$

3) on sait, avec la partie A, que $e^x \sin(x) \geq x$ sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ et on peut donc affirmer que $\mathcal{C}_f$ sera bien au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur cet intervalle (le graphique nous donnait une conjecture de ce résultat).

L'aire cherchée, notée A, sera donc égale à :

$$A = \int_0^{\pi/2} (f(x) - g(x))\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (x\sin x - x)\,dx = \int_0^{\pi/2} (x\sin x)\,dx - \int_0^{\pi/2} x\,dx$$

On obtient : $A = I - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2}$

soit $A = \frac{1+e^{\pi/2}}{2} - \frac{(\pi/2)^2}{2} = \boxed{\frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8}}$ u.a.

$\approx \boxed{1{,}67 \text{ ua}}$