Exercice 3

Partie A

(implicitement, dans cette partie A, l'idée est de travailler SANS coordonnées)

AFFIRMATION 1 → $\boxed{\text{VRAIE}}$

On a $\overrightarrow{JH} = \overrightarrow{JF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH}$

$= \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BI}$ → c'est vrai !

AFFIRMATION 2 → $\boxed{\text{FAUSSE}}$

on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AG}$

Donc $\overrightarrow{AB}$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AG}$: ces trois vecteurs sont donc coplanaires et ils ne forment pas une base de l'espace.

AFFIRMATION 3 → $\boxed{\text{VRAIE}}$

on a $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{IB} \cdot (\overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DM})$

$= \underbrace{\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LD}}_{} + \underbrace{\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{DM}}_{}$

$= -\frac{1}{4}$ car ce sont des vecteurs colinéaires de sens contraires, mesurant chacun $\frac{1}{2}$. $= 0$ car $\overrightarrow{IB} \perp \overrightarrow{DM}$

on a donc $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LD} = -IB \times LD = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

Donc on a bien $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{LD} = -\frac{1}{4}$.

Partie B

AFFIRMATION 4 → $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Un vecteur normal au plan P est $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (AB) sera donnée par $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-2 \\ -3-0 \\ 7-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

on calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 3 + (-1) \times (-3) + 3 \times 8$

$= 6 + 3 + 24 = 33 \neq 0$.

Donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux.

Donc le plan P et la droite (AB) ne sont pas parallèles.

AFFIRMATION 5 → $\boxed{\text{VRAIE}}$

On commence par vérifier si le point B vérifie bien l'équation cartésienne proposée.

On a $-2x_B + y_B - 3z_B + 34 = -2\times5 + (-3) - 3\times7 + 34$

$= -10 - 3 - 21 + 34 = 0 \rightarrow \boxed{\text{OK}}$

De plus, on a $\vec{n}(2;-1;3)$ et $\vec{n}'(-2;1;-3)$ comme vecteurs normaux respectifs de P et de P'.

On a : $\vec{n} = -\vec{n}'$ donc ces vecteurs sont colinéaires et les plans sont donc bien parallèles. $\rightarrow \boxed{\text{OK}}$

AFFIRMATION 6 → $\boxed{\text{VRAIE}}$

* Pour ceux qui la connaissent, il semblerait que l'on puisse utiliser la formule donnant la distance entre un point et un plan.

on utilise l'équation cartésienne de P.

On aurait ici $d = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

valeur absolue

et on obtient $d = \dfrac{|2\times2 - 0 + 3\times(-1) + 6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}} = \dfrac{|7|}{\sqrt{14}}$

et on a $d = \dfrac{7}{\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2} \rightarrow \boxed{\text{OK}}$

* Sinon, on peut aussi faire le raisonnement suivant !!

On va chercher les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur le plan P.

Ce point H doit vérifier l'équation du plan P

et le vecteur $\overrightarrow{AH}$ doit être colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$ du plan P.

$\overrightarrow{AH}$ colinéaire à $\vec{n} \iff$ il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$

$$\iff \begin{cases} x_H - 2 = k\times2 \\ y_H - 0 = k\times(-1) \\ z_H - (-1) = k\times3 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_H = 2+2k \\ y_H = -k \\ z_H = -1+3k \end{cases}$$

$$H \in P \iff 2\underbrace{(2+2k)}_{x_H} - \underbrace{(-k)}_{y_H} + 3\underbrace{(-1+3k)}_{z_H} + 6 = 0$$

On obtient : $4 + 4k + k - 3 + 9k + 6 = 0$

soit $14k + 7 = 0 \longrightarrow k = -\frac{1}{2}$

et on a donc pour le point H $\begin{pmatrix} x_H = 2 + 2\times(-\frac{1}{2}) = 1 \\ y_H = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \\ z_H = -1 + 3\times(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

et, enfin, on peut calculer

$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2}$$

$$= \sqrt{(1-2)^2 + (\frac{1}{2} - 0)^2 + (-\frac{5}{2} - (-1))^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

AFFIRMATION 7 $\longrightarrow$ $\boxed{\text{FAUSSE}}$

Une représentation paramétrique de la droite (AB) sera :

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \times k' = 2 + 3k' \\ y = 0 + (-3) \times k' = -3k' \\ z = -1 + 8 \times k' = -1 + 8k' \end{cases}$$

point A — vecteur $\overrightarrow{AB}$

* un vecteur directeur de (d) sera $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ qui n'est clairement pas colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Donc les droites (d) et (AB) ne sont pas parallèles.

* on s'intéresse maintenant à l'intersection de ces droites.

↳ on résout le système $\begin{cases} 2 + 3k' = -12 + 2k \\ -3k' = 6 \\ -1 + 8k' = 3 - 5k \end{cases}$

↳ on obtient $\begin{cases} 2 + 3\times(-2) = -12 + 2k \rightarrow k = \frac{8}{2} = \boxed{4} \\ k' = \frac{6}{-3} = -2 \\ -1 + 8\times(-2) = 3 - 5k \rightarrow k = \frac{-20}{-5} = \boxed{4} \end{cases}$

Donc on peut bien résoudre ce système.

Donc les droites (d) et (AB) sont sécantes et elles sont donc coplanaires.

↳ l'affirmation est donc $\boxed{\text{FAUSSE}}$.