

Exercice 2

Partie A 1) a) on a $U_1 = \sqrt{U_0} = \boxed{\sqrt{2}}$ et $U_2 = \sqrt{U_1} = \boxed{\sqrt{\sqrt{2}}}$

b) il semblerait que la suite soit décroissante et qu'elle converge vers 1.

2) a) Initialisation on a $U_0 = 2$ et $U_1 = \sqrt{2}$

Donc on a bien $1 \leq U_1 \leq U_0$

Hérédité on suppose que l'on a $1 \leq U_{n+1} \leq U_n$ et on vérifie que l'on aura $1 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$

on part de: $1 \leq U_{n+1} \leq U_n$

et on obtient: $\sqrt{1} \leq \sqrt{U_{n+1}} \leq \sqrt{U_n}$

c'est à dire: $1 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$

la fonction "racine carrée" est croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle conserve l'ordre.

et, d'après le principe de récurrence, on a bien la propriété cherchée.

b) La suite (U_n) est donc décroissante (car $U_{n+1} \leq U_n$) et elle est minorée (car $U_n \geq 1$) $\rightarrow$ la suite est convergente.

c) Les nombres $\sqrt{x}$ et x étant ici positif, on a l'équivalence suivante: $\sqrt{x} = x \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = x^2 \Leftrightarrow x = x^2$

On résout donc $x = x^2$ soit $x^2 - x = 0$

soit $x(x-1) = 0$

équation produit nul

on obtient $S = \{0; 1\}$

d) on pourrait écrire $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f qui est une fonction continue sur $[0; +\infty[$ (c'est la fonction racine carrée!).

(U_n) étant convergente, on sait avec le théorème du point fixe que sa limite l vérifiera l'équation $l = f(l)$.
D'après le résultat précédent, cette limite ne peut être égale qu'à 0 ou à 1.

(U_n) étant minorée par 1, sa limite ne peut pas être égale à 0 $\rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \boxed{1}$

Partie B

1) a) Le raisonnement est ici très simple.

$$\text{on a } \boxed{V_{n+1}} = \ln(U_{n+1}) = \ln(\sqrt{U_n}) = \ln(U_n^{1/2}) = \frac{1}{2} \ln U_n = \boxed{\frac{1}{2} V_n}$$

→ suite géométrique de raison $\boxed{\frac{1}{2}}$ avec $V_0 = \ln(U_0) = \boxed{\ln 2}$

$$\text{b) on a donc } V_n = V_0 \times q^{(n-0)} \rightarrow \boxed{V_n = \ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

c) on a $V_n = \ln(U_n)$ et donc on a $\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \ln(U_n)$.

$$\text{Avec } \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1^n}{2^n} = \frac{1}{2^n}, \text{ on obtient } \frac{\ln 2}{2^n} = \ln(U_n) \\ \text{ou } \boxed{\ln 2 = 2^n \ln(U_n)}.$$

2) a) avec la calculatrice, on a $U_6 \approx 1,01089 > 1,01$
et $U_7 \approx 1,00543 < 1,01$

Donc les valeurs de (U_n) se trouvent dans $]0,99; 1,01[$
à partir du rang $\boxed{k=7}$ et on a $\boxed{U_7 \approx 1,00543}$

b) En prenant $x-1$ comme approximation de $\ln(x)$,
on pourra dire qu'une approximation de $\ln(U_7)$ sera
donnée par $U_7 - 1$ et, donc, $\ln(U_7) \approx U_7 - 1 \approx \boxed{0,00543}$

c) on sait que $\ln 2 = 2^n \ln(U_n)$
on aura donc $\ln 2 = 2^7 \times \ln(U_7) \approx 2^7 \times 0,00543$
et on en déduit $\boxed{\ln 2 \approx 0,69504}$

3) D'après la méthode précédente, on a vu que :

$$\ln 2 \approx 2^7 \times (U_7 - 1)$$

et, si on généralise ce résultat, on aura :

$$\ln a \approx 2^k \times (U_k - 1) \quad \text{où } k \text{ est le plus petit entier tel que}$$

$$U_k \in]0,99; 1,01[.$$

Donc l'algorithme se complètera en écrivant :

$$L = 2^{**n} * (a - 1)$$

l'instruction "puissance".