Bac Spé Maths 2025
Voici la correction complète
pour le jour 2
du sujet Amérique du Nord
22 Mai 2025

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1

Partie A

1) on a $n = \boxed{15}$ et $p = \boxed{0,32}$

2) Avec la calculatrice, on obtient $P(N=4) \approx \boxed{0,206}$

3) On obtient, avec la calculatrice, $P(N \leq 6) \approx \boxed{0,828}$

4) On sait que $E(N) = n \times p = 15 \times 0,32 = \boxed{4,8}$ paniers marqués

5) a) Victor tente des paniers à trois points.
On a donc $\boxed{T = 3N}$

b) On a $E(T) = E(3N) = 3 \times E(N) = 3 \times 4,8 = \boxed{14,4 \text{ points}}$
↑ par linéarité de l'espérance.

→ sur une série de 15 lancers à trois points, Victor peut espérer réussir à marquer, en moyenne, 14,4 points.

c) On a $P(12 \leq T \leq 18) = P(12 \leq 3N \leq 18)$
$\Leftrightarrow P(4 \leq N \leq 6)$
on utilise ici une règle peu souvent utilisée mais qui est plutôt assez évidente.

et on a $P(4 \leq N \leq 6) = P(N=4) + P(N=5) + P(N=6) \approx \boxed{0,586}$

Partie B

1) a) M_{50} va représenter la moyenne des points marqués par Victor sur les 50 matchs.

b) par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(M_{50}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{50}}{50}\right) = \frac{1}{50}\left(E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{50})\right)$$

soit $E(M_{50}) = \frac{1}{50} \times (50 \times 22)$ (chaque espérance est égale à 22)

et on obtient $E(M_{50}) = \boxed{22}$ points.

Et les variables étant indépendantes, on peut écrire

$$V(M_{50}) = V\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{50}}{50}\right) = \frac{1}{50^2}\left(V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_{50})\right)$$
↑ ne pas oublier.

soit $V(M_{50}) = \frac{1}{50^2} \times (50 \times 65)$ (chaque variance est égale à 65)

et on obtient $V(M_{50}) = \frac{65}{50} = \boxed{1,3}$

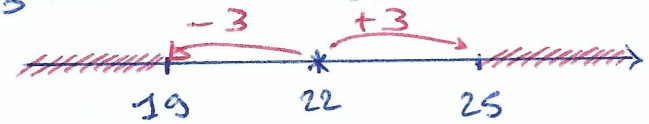
c) on utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff.

on a $P(|M_{50} - E(M_{50})| \geq 3) \leq \frac{V(M_{50})}{3^2}$

soit $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{1,3}{9}$ avec $\frac{1,3}{9} = \frac{13}{90}$!!

et on a bien $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$.

d) L'inégalité $|M_{50} - 22| \geq 3$ signifie que la variable M_n vérifie $M_{50} \geq 25$ et $M_{50} \leq 19$.



L'événement $P(19 < M_{50} < 25)$ est donc l'événement contraire de l'événement $P(|M_{50} - 22| \geq 3)$.

On a donc : $1 - P(19 < M_{50} < 25) \leq \frac{13}{90}$

soit $P(19 < M_{50} < 25) \geq 1 - \frac{13}{90} > 0,85$ → OK

$\approx 0,856$

2) on reprend l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff.

on a $P(|M_n - E(M_n)| \geq 3) \leq \frac{V(M_n)}{3^2}$

et, en généralisant les calculs effectués dans le 1) b),

on obtient $E(M_n) = \frac{1}{n} \times (22 \times n) = 22$

et $V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times (65 \times n) = \frac{65}{n}$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff devient :

$$P(|M_n - 22| \geq 3) \leq \frac{\frac{65}{n}}{9}$$

soit $P(|M_n - 22| \geq 3) \leq \frac{65}{9n}$

ce terme tend vers zéro quand $n \to +\infty$, et il pourra très rapidement devenir strictement inférieur à 0,01.
(à partir de $n = 723$ en fait !!)

Donc l'affirmation est fausse.

Exercice 2

Partie A 1) a) on a $U_1 = \sqrt{U_0} = \boxed{\sqrt{2}}$ et $U_2 = \sqrt{U_1} = \boxed{\sqrt{\sqrt{2}}}$

b) il semblerait que la suite soit décroissante et qu'elle converge vers 1.

2) a) **Initialisation** on a $U_0 = 2$ et $U_1 = \sqrt{2}$

Donc on a bien $1 \leq U_1 \leq U_0$

Hérédité on suppose que l'on a $1 \leq U_{n+1} \leq U_n$ et on vérifie que l'on aura $1 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$

on part de : $1 \leq U_{n+1} \leq U_n$

et on obtient : $\sqrt{1} \leq \sqrt{U_{n+1}} \leq \sqrt{U_n}$ ← la fonction "racine carrée" est croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle conserve l'ordre.

c'est à dire : $1 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1}$

et, d'après le principe de récurrence, on a bien la propriété cherchée.

b) La suite (U_n) est donc décroissante (car $U_{n+1} \leq U_n$) et elle est minorée (car $U_n \geq 1$) → la suite est convergente.

c) Les nombres $\sqrt{x}$ et x étant ici positifs, on a l'équivalence suivante : $\sqrt{x} = x \iff (\sqrt{x})^2 = x^2 \iff x = x^2$

On résout donc $x = x^2$ soit $x^2 - x = 0$

soit $x(x-1) = 0$

équation produit nul

↪ on obtient $S = \{0 ; 1\}$

d) on pourrait écrire $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f qui est une fonction continue sur $[0 ; +\infty[$ (c'est la fonction racine carrée !).

(U_n) étant convergente, on sait avec le théorème du point fixe que sa limite ℓ vérifiera l'équation $\ell = f(\ell)$.

D'après le résultat précédent, cette limite ne peut être égale qu'à 0 ou à 1.

(U_n) étant minorée par 1, sa limite ne peut pas être égale à 0 → $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \boxed{1}$

Partie B

1) a) Le raisonnement est ici très simple.

On a $\boxed{v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(\sqrt{u_n}) = \ln(u_n^{1/2}) = \frac{1}{2}\ln u_n = \frac{1}{2}v_n}$

→ suite géométrique de raison $\boxed{\frac{1}{2}}$ avec $v_0 = \ln(u_0) = \boxed{\ln 2}$

b) on a donc $v_n = v_0 \times q^{(n-0)}$ → $\boxed{v_n = \ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

c) on a $v_n = \ln(u_n)$ et donc on a $\ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \ln(u_n)$.

Avec $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1^n}{2^n} = \frac{1}{2^n}$, on obtient $\frac{\ln 2}{2^n} = \ln(u_n)$

ou $\boxed{\ln 2 = 2^n \ln(u_n)}$.

2) a) avec la calculatrice, on a $u_6 \approx 1{,}01089 > 1{,}01$

et $u_7 \approx 1{,}00543 < 1{,}01$

Donc les valeurs de (u_n) se trouvent dans $]0{,}99 ; 1{,}01[$

à partir du rang $\boxed{k = 7}$ et on a $\boxed{u_7 \approx 1{,}00543}$

b) En prenant $x-1$ comme approximation de $\ln(x)$,

on pourra dire qu'une approximation de $\ln(u_7)$ sera

donnée par $u_7 - 1$ et, donc, $\ln(u_7) \approx u_7 - 1 \approx \boxed{0{,}00543}$

c) on sait que $\ln 2 = 2^n \ln(u_n)$

on aura donc $\ln 2 = 2^7 \times \ln(u_7) \approx 2^7 \times 0{,}00543$

et on en déduit $\boxed{\ln 2 \approx 0{,}69504}$

3) D'après la méthode précédente, on a vu que :

$$\ln 2 \approx 2^7 \times (u_7 - 1)$$

et, si on généralise ce résultat, on aura :

$\ln a \approx 2^k \times (u_k - 1)$ où k est le plus petit entier tel que $u_k \in]0{,}99 ; 1{,}01[$.

Donc l'algorithme se complètera en écrivant :

L = 2**n*(a-1)

l'instruction "puissance".

Exercice 3

Partie A (implicitement, dans cette partie A, l'idée est de travailler SANS coordonnées)

AFFIRMATION 1 → VRAIE

On a $\vec{JH} = \vec{JF} + \vec{FG} + \vec{GH}$

$= \vec{DM} + \vec{BC} + \vec{BA}$

$= \vec{DM} - \vec{CB} + 2\vec{BI}$ → c'est vrai !

AFFIRMATION 2 → FAUSSE

On a $\vec{AB} = \vec{HG} = \vec{HA} + \vec{AG} = -\vec{AH} + \vec{AG}$

Donc $\vec{AB}$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{AH}$ et $\vec{AG}$: ces trois vecteurs sont donc coplanaires et ils ne forment pas une base de l'espace.

AFFIRMATION 3 → VRAIE

On a $\vec{IB} \cdot \vec{LM} = \vec{IB} \cdot (\vec{LD} + \vec{DM})$

$= \vec{IB} \cdot \vec{LD} + \vec{IB} \cdot \vec{DM}$

$= -\frac{1}{4}$ car ce sont des vecteurs colinéaires de sens contraires, mesurant chacun $\frac{1}{2}$ $\quad = 0$ car $\vec{IB} \perp \vec{DM}$

On a donc $\vec{IB} \cdot \vec{LD} = -IB \times LD = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

Donc on a bien $\vec{IB} \cdot \vec{LD} = -\frac{1}{4}$.

Partie B

AFFIRMATION 4 → FAUSSE

Un vecteur normal au plan P est $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (AB) sera donnée par $\vec{AB}\begin{pmatrix} 5-2 \\ -3-0 \\ 7-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

On calcule $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 2 \times 3 + (-1) \times (-3) + 3 \times 8$

$= 6 + 3 + 24 = 33 \neq 0$.

Donc $\vec{n}$ et $\vec{AB}$ ne sont pas orthogonaux.

Donc le plan P et la droite (AB) ne sont pas parallèles.

AFFIRMATION 5 → VRAIE

On commence par vérifier si le point B vérifie bien l'équation cartésienne proposée.

On a $-2x_B + y_B - 3z_B + 34 = -2\times 5 + (-3) - 3\times 7 + 34$

$= -10 - 3 - 21 + 34 = 0$ → OK

De plus, on a $\vec{n}(2;-1;3)$ et $\vec{n'}(-2;1;-3)$ comme vecteurs normaux respectifs de P et de P'.

On a : $\vec{n} = -\vec{n'}$ donc ces vecteurs sont colinéaires et les plans sont donc bien parallèles. → OK

AFFIRMATION 6 → VRAIE

* Pour ceux qui la connaissent, il semblerait que l'on puisse utiliser la formule donnant la distance entre un point et un plan (on utilise l'équation cartésienne de P).

On aurait ici $d = \dfrac{|a x_A + b y_A + c z_A + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (valeur absolue)

et on obtient $d = \dfrac{|2\times 2 - 0 + 3\times(-1) + 6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}} = \dfrac{|7|}{\sqrt{14}}$

et on a $d = \dfrac{7}{\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$ → OK

* Sinon, on peut aussi faire le raisonnement suivant !!

On va chercher les coordonnées du point H projeté orthogonal du point A sur le plan P.

Ce point H doit vérifier l'équation du plan P

et le vecteur $\vec{AH}$ doit être colinéaire au vecteur normal $\vec{n}$ du plan P.

$\vec{AH}$ colinéaire à $\vec{n}$ $\iff$ il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{AH} = k\vec{n}$

$$\iff \begin{cases} x_H - 2 = k\times 2 \\ y_H - 0 = k\times(-1) \\ z_H - (-1) = k\times 3 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_H = 2+2k \\ y_H = -k \\ z_H = -1+3k \end{cases}$$

$H \in P \iff 2(\underbrace{2+2k}_{x_H}) - (\underbrace{-k}_{y_H}) + 3(\underbrace{-1+3k}_{z_H}) + 6 = 0$

On obtient : $4+4k+k-3+9k+6=0$

soit $14k+7=0 \rightarrow k=-\frac{1}{2}$

et on a donc pour le point H $\begin{cases} x_H = 2+2\times(-\frac{1}{2}) = 1 \\ y_H = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \\ z_H = -1+3\times(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{2} \end{cases}$

et, enfin, on peut calculer

$$AH = \sqrt{(x_H-x_A)^2+(y_H-y_A)^2+(z_H-z_A)^2}$$

$$= \sqrt{(1-2)^2+(\frac{1}{2}-0)^2+(-\frac{5}{2}-(-1))^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

AFFIRMATION 7 $\rightarrow$ **FAUSSE**

Une représentation paramétrique de la droite (AB) sera :

$$\begin{cases} x = 2+3\times k' = 2+3k' \\ y = 0+(-3)\times k' = -3k' \\ z = -1+8\times k' = -1+8k' \end{cases}$$

point A ; vecteur $\overrightarrow{AB}$

* un vecteur directeur de (d) sera $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ qui n'est clairement pas colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Donc les droites (d) et (AB) ne sont pas parallèles.

* on s'intéresse maintenant à l'intersection de ces droites.

↳ on résout le système $\begin{cases} 2+3k' = -12+2k \\ -3k' = 6 \\ -1+8k' = 3-5k \end{cases}$

↳ on obtient $\begin{cases} 2+3\times(-2) = -12+2k \rightarrow k = \frac{8}{2} = \boxed{4} \\ k' = \frac{6}{-3} = -2 \\ -1+8\times(-2) = 3-5k \rightarrow k = \frac{-20}{-5} = \boxed{4} \end{cases}$

Donc on peut bien résoudre ce système.

Donc les droites (d) et (AB) sont sécantes

et elles sont donc coplanaires.

↳ l'affirmation est donc **FAUSSE**.

Exercice 4

Partie A 1) a) on a $f(x) = \underbrace{e^x}_{u} \times \underbrace{\sin x}_{v}$

et on obtient $f'(x) = \underbrace{e^x}_{u'} \times \underbrace{\sin x}_{v} + \underbrace{e^x}_{u} \times \underbrace{\cos x}_{v'}$

c'est à dire $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$.

b) sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin x \geq 0$ et $\cos x \geq 0$.

et on peut même affirmer que sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, $\sin x > 0$ et $\cos x > 0$

avec $\sin(0) + \cos(0) = 1 \neq 0$

et $\sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0$

et donc $(\sin x + \cos x) > 0$

Donc, puisque pour tout x, on a $e^x > 0$, on peut en conclure que $f'(x) > 0$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$.

2) a) on aura $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

avec $f'(0) = e^0(\sin(0) + \cos(0)) = 1 \times (0 + 1) = 1$.

et $f(0) = e^0 \sin(0) = 1 \times 0 = 0$.

on obtient $y = 1(x - 0) + 0$ soit $\boxed{y = x}$

b) on a $f'(x) = \underbrace{e^x}_{u} (\underbrace{\sin x + \cos x}_{v})$

et on obtient $f''(x) = \underbrace{e^x}_{u'} \times (\underbrace{\sin x + \cos x}_{v}) + \underbrace{e^x}_{u} \times (\underbrace{\cos x - \sin x}_{v'})$

soit $f''(x) = e^x(\sin x + \cos x + \cos x - \sin x)$

$= 2e^x \cos x$

↳ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, on a, bien sûr, $e^x > 0$

et on aura aussi $\cos x \geq 0$.

on en déduit :

x	0		$\pi/2$
$f''(x)$		$+$	0
f		CONVEXE	

car $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

c) La fonction f étant convexe sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, sa courbe sera au dessus de ses tangentes et, donc, au dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = x$.

on en déduit : $f(x) \geq x$ sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$

c'est à dire $\boxed{e^x \sin(x) \geq x}$ sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

c) on a $f''(\frac{\pi}{2}) = 0$ car $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

et sur $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$, on aura $\cos(x) \leq 0 \rightarrow f''(x) \leq 0$.

Donc la dérivée seconde f'' change de signe sur $[0 ; \pi]$ en s'annulant en $\frac{\pi}{2}$ → on a alors un point d'inflexion en $\frac{\pi}{2}$.

Partie B

1) **calcul n°1**

on a $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{e^x}_{u'} \times \underbrace{\sin x}_{v}$ avec $u'(x) = e^x \rightarrow u(x) = e^x$, $v(x) = \sin x \rightarrow v'(x) = \cos x$

$= \left[\underbrace{e^x}_{u} \times \underbrace{\sin x}_{v}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^x}_{u} \times \underbrace{\cos x}_{v'} dx$

$= e^{\pi/2} \times \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} - e^0 \times \underbrace{\sin 0}_{=0} - J$

et on a bien $\boxed{I = e^{\pi/2} - J}$

calcul n°2

on a $I = \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^x}_{u} \times \underbrace{\sin x}_{v'}$ avec $u(x) = e^x \rightarrow u'(x) = e^x$, $v'(x) = \sin x \rightarrow v(x) = -\cos x$

$= \left[\underbrace{e^x}_{u} \times \underbrace{(-\cos x)}_{v}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^x}_{u'} \times \underbrace{(-\cos x)}_{v} dx$

$= e^{\pi/2} \times \underbrace{(-\cos\frac{\pi}{2})}_{=0} - e^0 \times \underbrace{(-\cos 0)}_{=1} + \int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx$

et on a bien $\boxed{I = 1 + J}$

2) on a $I = 1 + J$ c'est à dire $J = I - 1$

et on a $I = e^{\pi/2} - J = e^{\pi/2} - (I - 1) = e^{\pi/2} - I + 1$

on obtient $2I = e^{\pi/2} + 1$ soit $\boxed{I = \frac{e^{\pi/2} + 1}{2}}$

3) on sait, avec la partie A, que $e^x \sin(x) \geq x$ sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ et on peut donc affirmer que $\mathcal{C}_f$ sera bien au dessus de $\mathcal{C}_g$ sur cet intervalle (le graphique nous donnait une conjecture de ce résultat).

L'aire cherchée, notée $\mathcal{A}$, sera donc égale à :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi/2} (f(x) - g(x))\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (x\sin x - x)\,dx = \int_0^{\pi/2} (x\sin x)\,dx - \int_0^{\pi/2} x\,dx$$

On obtient : $\mathcal{A} = I - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/2}$

soit $\mathcal{A} = \frac{1+e^{\pi/2}}{2} - \frac{(\pi/2)^2}{2} = \boxed{\frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{\pi^2}{8}}$ u.a.

$$\approx \boxed{1,67 \text{ ua}}$$