

Bac Spé Maths 2025
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
pour le sujet Amérique du Nord
21 Mai 2025

Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

on applique la fonction $\ln$ qui conserve l'ordre car elle est croissante sur $]0; +\infty[$.

on obtient $\ln 0,855^n \leq \ln 0,01$

$$n \times \ln 0,855 \leq \ln 0,01$$

on a divisé par $\ln 0,855$ qui est négatif

$$\hookrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,855} \approx 29,4$$

Donc on aura la condition voulue à partir de $\boxed{30}$ connexions.

3) a) Par linéarité de l'espérance, on aura:

$$E(F_n) = E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} E(X_n) = \frac{1}{n} \times np$$

$$\hookrightarrow E(F_n) = p = \boxed{0,145}$$

espérance d'une loi binomiale

b) on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev.

On a $P(|F_n - E(F_n)| \geq \boxed{0,1}) \leq \frac{V(F_n)}{\boxed{0,1}^2}$

$$\text{soit } P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{0,123975}{n}$$

$$\text{soit } P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{12,3975}{n} \leq \frac{12,5}{n}$$

c) En appliquant le résultat de la question b,

$$\text{on obtient } P(|F_{1000} - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{12,5}{1000}$$

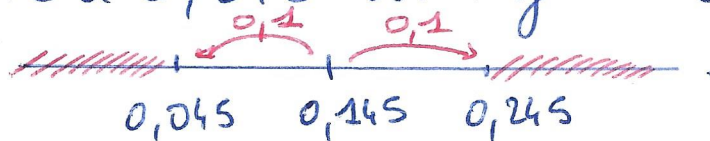
$$\text{soit } P(|F_{1000} - 0,145| \geq 0,1) \leq 0,0125$$

ou 1,25%

or l'inégalité $|F_{1000} - 0,145| \geq 0,1$ signifie que l'écart entre F_{1000} et 0,145 est supérieur ou égal à 0,1,

Donc la probabilité que F_n soit inférieur à 0,045

ou supérieur à 0,245 est inférieure à 0,0125.



et, donc, en obtenant $F_{1000} = 0,3$ avec $0,3 \notin [0,045; 0,245]$,

il a raison de soupçonner un dysfonctionnement.

Exercice 2

$$1) \text{ on a } U_1 = \frac{2 \times U_0 + 1}{U_0 + 2} = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

$$2) a) \text{ on a } a_0 = \frac{U_0}{U_0 - 1} = \frac{2}{2 - 1} = \boxed{2}$$

$$\text{et } a_1 = \frac{U_1}{U_1 - 1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4} - 1} = \boxed{5}$$

$$b) \text{ on a } a_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{U_{n+1} - 1} = \frac{\frac{2U_n + 1}{U_n + 2}}{\frac{2U_n + 1}{U_n + 2} - 1} = \frac{\frac{2U_n + 1}{U_n + 2}}{\frac{2U_n + 1 - U_n - 2}{U_n + 2}}$$

$$\text{et en simplifiant par } U_n + 2, \text{ on a } a_{n+1} = \frac{2U_n + 1}{U_n - 1}$$

$$\text{On calcule alors } 3a_n - 1 = 3 \times \frac{U_n}{U_n - 1} - 1 = \frac{3U_n - (U_n - 1)}{U_n - 1} = \frac{2U_n + 1}{U_n - 1}$$

et donc on a bien $a_{n+1} = 3a_n - 1$ pour tout n

c) Initialisation : elle doit se faire ici pour $n=1$.

on a $a_1 = 5$ et $3 \times 1 - 1 = 2$ donc on a bien $a_1 \geq 3 \times 1 - 1$

↳ l'inégalité proposée est vérifiée au rang 1.

Hérédité : on suppose l'inégalité vraie pour n soit $a_n \geq 3n - 1$

et montrons qu'elle reste vraie au rang $(n+1)$.

On veut donc montrer $a_{n+1} \geq 3(n+1) - 1$ soit $a_{n+1} \geq 3n + 2$.

On part alors de $a_n \geq 3n - 1$

et on obtient $3a_n \geq 3(3n - 1)$

et donc $3a_n - 1 \geq 3(3n - 1) - 1$

soit $a_{n+1} \geq 9n - 4$

Il nous reste à vérifier que, pour $n \geq 1$, on a $9n - 4 \geq 3n + 2$.

On calcule $9n - 4 - (3n + 2) = 6n - 6 = 6(n - 1) \geq 0$ pour $n \geq 1$

On obtient donc : $a_{n+1} \geq 9n - 4 \geq 3n + 2$

et c'est bien l'inégalité qu'il fallait obtenir.

Avec le principe de récurrence, on a bien $a_n \geq 3n - 1$

pour tout $n \geq 1$.

d) on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n-1) = +\infty$ et, avec le théorème de comparaison, puisque $a_n \geq 3n-1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \boxed{+\infty}$

3) a) on a $a_n = \frac{U_n}{U_n-1}$ soit $a_n(U_n-1) = U_n$

on obtient donc $a_n U_n - a_n = U_n$

soit $a_n U_n - U_n = a_n$

soit $U_n(a_n-1) = a_n \rightarrow U_n = \frac{a_n}{a_n-1}$

⚠ il faut juste vérifier que l'on peut bien diviser par a_n-1 c'est à dire que $a_n \neq 1$ pour tout n .

or on a $a_0 = 2 \neq 1$ et, pour $n \geq 1$, $a_n \geq 3n-1 > 1$ donc $\neq 1$

b) on a $U_n = \frac{a_n}{a_n-1}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$:

on a donc ici une forme indéterminée et on va donc factoriser

par $a_n \rightarrow$ on a $U_n = \frac{\cancel{a_n} 1}{\cancel{a_n} (1 - \frac{1}{a_n})} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}}$ tend vers 0

$\hookrightarrow$ on obtient donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \boxed{1}$

4) a) (U_n) est donc une suite décroissante qui converge vers 1. Cette fonction algo(p) nous permet, pour une valeur de p donnée, de connaître le rang n (et la valeur de U_n correspondante) à partir duquel l'écart entre les termes de la suite et 1 devient inférieur ou égal à p.

b) on cherche n à partir duquel on a $U_n - 1 \leq 0,001$.

$\hookrightarrow$ on a $U_5 \approx 1,0027 \rightarrow U_5 - 1 > 0,001$

et $U_6 \approx 1,0009 \rightarrow U_6 - 1 \leq 0,001$

Donc la valeur cherchée est $\boxed{n=6}$.

Exercice 3

AFFIRMATION 1 → VRAIE

- * La droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ et l'axe des ordonnées est dirigée par le vecteur $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{j}$ ne sont clairement pas colinéaires.
Donc les droites ne sont pas parallèles.
- * pour vérifier si ces droites sont sécantes, on peut écrire la représentation paramétrique de l'axe des ordonnées qui passe par le point $O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et qui est dirigée par $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
↳ on obtient
$$\begin{cases} x = 0 + 0t' \\ y = 0 + 1t' \\ z = 0 + 0t' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t' \\ z = 0 \end{cases}$$
- on résout alors le système
$$\begin{cases} 3 - 2t = 0 \rightarrow t = \frac{3}{2} \\ -1 = t' \rightarrow t' = -1 \\ 2 - 6t = 0 \rightarrow t = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \text{impossible}$$
- Donc les droites ne sont pas sécantes.
Et comme elles ne sont pas parallèles alors elles sont non coplanaires.

AFFIRMATION 2 → VRAIE

On commence en vérifiant si le point A appartient bien à ce plan.

On calcule $x_A + 3z_A + 3 = 3 + 3 \times (-2) + 3 = \boxed{0}$

↳ le point A vérifie bien l'équation de ce plan.

Ensuite, on utilise l'équation cartésienne du plan pour obtenir un vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Et on sait que la droite (d) est dirigée par $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{v} = -2\vec{n}$. Les vecteurs sont donc colinéaires.

Donc la droite (d) est bien orthogonale à ce plan
qui vérifie bien les deux conditions proposées.

AFFIRMATION 3 → FAUSSE

On commence en cherchant les coordonnées du point C qui appartient à (d) en ayant une abscisse égale à 2

↳ cela va nous fournir la valeur du paramètre t.

$$\text{En effet, on a } \begin{cases} x = 3 - 2t = \boxed{2} \rightarrow t = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \\ y = \boxed{-1} \\ z = 2 - 6t \rightarrow z = 2 - 6 \times \frac{1}{2} = \boxed{-1} \end{cases}$$

Donc les coordonnées du point C sont $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{On a donc } \vec{AB} \begin{pmatrix} 5-3 \\ -4-(-3) \\ -1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} 2-3 \\ -1-(-3) \\ -1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et on en déduit } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = \boxed{-3}.$$

$$\text{Or, on sait aussi que } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\text{On calcule } AB = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{et } AC = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{On a donc } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3 = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\text{soit } -3 = 6 \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\text{soit } \cos(\widehat{BAC}) = -\frac{3}{6} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{or on a } \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq -\frac{1}{2}.$$

AFFIRMATION 4 → VRAIE

On peut ici directement la formule qui nous donne la distance du point B au plan P car cette distance correspond bien à la distance BH.

$$\text{On a } BH = \frac{|ax_B + by_B + cz_B + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

en utilisant l'équation de P: $\overset{a}{1}x + \overset{c}{3}z - \overset{d}{7} = 0$
et on a $b=0$.

On obtient: $BH = \frac{|1 \times 5 + 0 \times (-4) + 3 \times (-1) - 7|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2}}$

soit $BH = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \boxed{\frac{5}{\sqrt{10}}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$

Mais il y a heureusement une autre méthode pour ceux qui ne connaissent pas cette formule.

On peut chercher les coordonnées du point H.

Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ doit être colinéaire au vecteur normal du plan P, qui aura pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a donc $\overrightarrow{BH} = k \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} x_H - 5 = k \times 1 \\ y_H - (-4) = k \times 0 \\ z_H - (-1) = k \times 3 \end{cases}$

↳ on en déduit $\begin{cases} x_H = 5 + k \\ y_H = -4 \\ z_H = -1 + 3k \end{cases}$

et ce point H appartient au plan P

donc on aura $x_H + 3z_H - 7 = 0$

soit $5 + k + 3(-1 + 3k) - 7 = 0$

soit $10k = 5 \rightarrow \boxed{k} = \frac{5}{10} = \boxed{\frac{1}{2}}$

on en déduit H $\begin{cases} x_H = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2} \\ y_H = -4 \\ z_H = -1 + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

et on peut calculer $BH = \sqrt{(x_H - x_B)^2 + (y_H - y_B)^2 + (z_H - z_B)^2}$

soit $BH = \sqrt{\left(\frac{11}{2} - 5\right)^2 + (-4 - (-4))^2 + \left(\frac{1}{2} - (-1)\right)^2}$

et on obtient bien $BH = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$

Bilan: il peut être très intéressant d'apprendre la formule qui donne la distance entre un point et un plan !!

Exercice 4

Partie A

1) on constate que le tableau de signes de $\mathcal{C}_2$ correspond aux variations de la courbe $\mathcal{C}_1$.

En effet, on a

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$		
signes de $\mathcal{C}_2$		$-$	0	$+$	0	$-$
variations de $\mathcal{C}_1$						

Donc $\mathcal{C}_2$ correspond à g' et $\mathcal{C}_1$ correspond à g .

2) L'équation de la tangente en 0 s'écrit :

$$y = g'(0)(x-0) + g(0)$$

Avec $\mathcal{C}_2$, on a $g'(0) = 2$ et avec $\mathcal{C}_1$, on a $g(0) = 1$.

On obtient donc $y = 2(x-0) + 1 \rightarrow y = 2x + 1$.

Partie B

1) on doit ici calculer $f_0(x) + f_0'(x)$ et vérifier que l'on obtient bien $(2x+3)e^{-x}$.

$$\text{On a } f_0(x) = \underbrace{(x^2 + 3x)}_u \times \underbrace{e^{-x}}_v$$

$$\text{et on obtient } f_0'(x) = \underbrace{(2x+3)}_{u' \times v} e^{-x} + \underbrace{(x^2 + 3x)}_u \times \underbrace{(-e^{-x})}_{v'}$$

$$\text{soit } f_0'(x) = e^{-x} (2x+3 - x^2 - 3x) = e^{-x} (-x^2 - x + 3)$$

on obtient donc :

$$f_0(x) + f_0'(x) = (x^2 + 3x)e^{-x} + e^{-x}(-x^2 - x + 3)$$

$$= e^{-x} (\cancel{x^2} + 3x - \cancel{x^2} - x + 3)$$

$$= e^{-x} (2x + 3) \rightarrow \boxed{\text{OK}}$$

2) on applique le cours !

on a $y + y' = 0$ soit $y' = -y$ soit $y = C e^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3) on sait que les solutions de (E) s'obtiennent par la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E₀).

$$\text{on obtient donc : } x \rightarrow (x^2 + 3x)e^{-x} + C e^{-x}$$

$$\text{ou } x \rightarrow e^{-x} (x^2 + 3x + C)$$

4) on aurait donc $g(x) = e^{-x}(x^2 + 3x + C)$
 avec une condition initiale $g(0) = 1$ (voir partie A).
 on obtient $g(0) = \underline{e^{-0}}(0^2 + 3 \times 0 + C) = 1$ soit $C = 1$

on aurait donc $g(x) = e^{-x}(x^2 + 3x + 1)$.

5) on reprend l'expression $f(x) = e^{-x}(x^2 + 3x + C)$

$$\hookrightarrow \text{on a } f'(x) = -e^{-x}(x^2 + 3x + C) + e^{-x}(2x + 3) \\ = e^{-x}(-x^2 - x + 3 - C)$$

$$\text{et } f''(x) = -e^{-x}(-x^2 - x + 3 - C) + e^{-x}(-2x - 1) \\ = e^{-x}(x^2 - x + C - 4)$$

Pour que la courbe de f admette exactement deux points d'inflexion, il faut que f'' s'annule deux fois (en changeant de signe), ce qui est possible si le trinôme $x^2 - x + C - 4$ admette deux racines, c'est à dire si son discriminant est strictement positif.

$$\hookrightarrow \text{on a } \Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (C - 4) \\ = 1 - 4(C - 4) = 17 - 4C$$

$$\text{et on veut } \Delta > 0 \text{ soit } 17 - 4C > 0 \text{ ou } \boxed{C < \frac{17}{4}}$$

Partie C

$$1) \text{ on a } f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x} = x^2 e^{-x} + 3x e^{-x} + 2e^{-x}$$

avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \boxed{0}$ et, avec les croissances comparées,

$$\text{on a également } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \boxed{0}$$

$$\text{et on a donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \boxed{0}$$

$$2) a) \text{ on a } f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$$

$$\hookrightarrow f'(x) = \underbrace{(2x + 3)}_{u' \times v} e^{-x} + \underbrace{(x^2 + 3x + 2)}_u \underbrace{(-e^{-x})}_{v'}$$

$$\hookrightarrow f'(x) = e^{-x}(2x + 3 - x^2 - 3x - 2) \\ = e^{-x}(-x^2 - x + 1).$$

b) on a $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc le signe de $f'(x)$ est donné par le signe de $(-x^2 - x + 1)$.

On cherche les racines de ce trinôme.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = \boxed{5} > 0 \rightarrow 2 \text{ racines}$$

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \times (-1)} = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

On obtient le tableau suivant.

Le coefficient
de x^2 est négatif
pour ce trinôme.
Donc les signes!

x	$-\infty$	x_2	0	x_1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$			$\nearrow$ 2	$\searrow$ $\boxed{+}$	$\searrow$ 0

on a $x_2 < x_1$

3) On rajoute 0 et son image $f(0)$ dans le tableau ci-dessus, ainsi que la limite en $+\infty$.

$$\text{On a } f(0) = (0^2 + 3 \times 0 + 2) \times e^{-0} = 2 \times 1 = \boxed{2} > 0.$$

On vérifie ainsi que l'on a bien $f(x) > 0$ sur $[0; +\infty[$.

4) on a $\alpha > 0$ et la fonction est bien strictement positive sur $[0; +\infty[$.

$$\text{On aura } A(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx = F(\alpha) - F(0)$$

$$\text{soit } A(\alpha) = (-\alpha^2 - 5\alpha - 7)e^{-\alpha} - (-0^2 - 5 \times 0 - 7)e^{-0} = \underline{\underline{= 1}}$$

$$\text{soit } A(\alpha) = (-\alpha^2 - 5\alpha - 7)e^{-\alpha} + 7 \text{ (u.a.)}$$