Exercice 4

Partie A

1) on constate que le tableau de signes de $\mathcal{C}_2$ correspond aux variations de la courbe $\mathcal{C}_1$.

En effet, on a

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signes de $\mathcal{C}_2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de $\mathcal{C}_1$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Donc $\mathcal{C}_2$ correspond à g' et $\mathcal{C}_1$ correspond à g.

2) L'équation de la tangente en 0 s'écrira :

$$y = g'(0)(x-0) + g(0)$$

Avec $\mathcal{C}_2$, on a $g'(0) = 2$ et avec $\mathcal{C}_1$, on a $g(0) = 1$.

On obtient donc $y = 2(x-0)+1 \rightarrow y = 2x+1$.

Partie B

1) on doit ici calculer $f_0(x) + f_0'(x)$ et vérifier que l'on obtient bien $(2x+3)e^{-x}$.

On a $f_0(x) = \underbrace{(x^2+3x)}_{u} \times \underbrace{e^{-x}}_{v}$

et on obtient $f_0'(x) = \underbrace{(2x+3)}_{u'} \times \underbrace{e^{-x}}_{v} + \underbrace{(x^2+3x)}_{u} \times \underbrace{(-e^{-x})}_{v'}$

soit $f_0'(x) = e^{-x}(2x+3-x^2-3x) = e^{-x}(-x^2-x+3)$

On obtient donc :

$$f_0(x) + f_0'(x) = (x^2+3x)e^{-x} + e^{-x}(-x^2-x+3)$$
$$= e^{-x}(\cancel{x^2}+3x-\cancel{x^2}-x+3)$$
$$= e^{-x}(2x+3) \rightarrow \boxed{\text{OK}}.$$

2) on applique le cours !

on a $y+y'=0$ soit $y'=-y$ soit $y = Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3) on sait que les solutions de (E) s'obtiennent par la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E_0).

On obtient donc : $x \rightarrow (x^2+3x)e^{-x} + Ce^{-x}$

ou $x \rightarrow e^{-x}(x^2+3x+C)$

4) on aurait donc $g(x) = e^{-x}(x^2+3x+c)$

avec une condition initiale $g(0) = 1$ (voir partie A).

on obtient $g(0) = \underbrace{e^{-0}}_{=1}(0^2+3\times 0+c) = 1$ soit $c = 1$

on aurait donc $g(x) = e^{-x}(x^2+3x+1)$.

5) on reprend l'expression $f(x) = e^{-x}(x^2+3x+c)$

↪ on a
$$f'(x) = -e^{-x}(x^2+3x+c) + e^{-x}(2x+3)$$
$$= e^{-x}(-x^2-x+3-c)$$

et
$$f''(x) = -e^{-x}(-x^2-x+3-c) + e^{-x}(-2x-1)$$
$$= e^{-x}(x^2-x+c-4)$$

Pour que la courbe de f admette exactement deux points d'inflexion, il faut que f'' s'annule deux fois (en changeant de signe), ce qui est possible si le trinôme $x^2-x+c-4$ admette deux racines, c'est à dire si son discriminant est strictement positif.

↪ on a
$$\Delta = (-1)^2 - 4\times 1\times(c-4)$$
$$= 1 - 4(c-4) = 17-4c$$

et on veut $\Delta > 0$ soit $17-4c > 0$ ou $\boxed{c < \frac{17}{4}}$

Partie C

1) on a $f(x) = (x^2+3x+2)e^{-x} = x^2e^{-x} + 3xe^{-x} + 2e^{-x}$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \boxed{0}$ et, avec les croissances comparées,

on a également $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \boxed{0}$

et on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{0}$

2) a) on a $f(x) = (x^2+3x+2)e^{-x}$

→ $f'(x) = \underbrace{(2x+3)e^{-x}}_{u'\times v} + \underbrace{(x^2+3x+2)(-e^{-x})}_{u\times v'}$

→ $f'(x) = e^{-x}(2x+3-x^2-3x-2)$
$$= e^{-x}(-x^2-x+1).$$

b) On a $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc le signe de $f'(x)$ est donné par le signe de $(-x^2 - x + 1)$.

On cherche les racines de ce trinôme.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = \boxed{5} > 0 \rightarrow 2 \text{ racines}$$

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \times (-1)} = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

On a $x_2 < x_1$

On obtient le tableau suivant.

Le coefficient de x^2 est négatif pour ce trinôme. D'où les signes !

x	$-\infty$		x_2		0		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	2	$\nearrow$ $\boxed{+}$		$\searrow$	0

3) On rajoute 0 et son image $f(0)$ dans le tableau ci-dessus, ainsi que la limite en $+\infty$.

On a $f(0) = (0^2 + 3 \times 0 + 2) \times e^{-0} = 2 \times 1 = \boxed{2} \boxed{> 0}$.

On vérifie ainsi que l'on a bien $f(x) > 0$ sur $[0 ; +\infty[$.

4) On a $\alpha > 0$ et la fonction est bien strictement positive sur $[0 ; +\infty[$.

On aura $\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)\,dx = F(\alpha) - F(0)$

soit $\mathcal{A}(\alpha) = (-\alpha^2 - 5\alpha - 7) e^{-\alpha} - (-0^2 - 5 \times 0 - 7) \underbrace{e^{-0}}_{=1}$

soit $\mathcal{A}(\alpha) = (-\alpha^2 - 5\alpha - 7) e^{-\alpha} + 7$ (u.a.)