Exercice 3

AFFIRMATION 1 → $\boxed{\text{VRAIE}}$

* La droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$ et l'axe des ordonnées est dirigée par le vecteur $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.
Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{j}$ ne sont clairement pas colinéaires.
Donc les droites ne sont pas parallèles.

* pour vérifier si ces droites sont sécantes, on peut écrire la représentation paramétrique de l'axe des ordonnées qui passe par le point $O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et qui est dirigée par $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

↳ on obtient $\begin{cases} x = 0 + 0t' \\ y = 0 + 1t' \\ z = 0 + 0t' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = t' \\ z = 0 \end{cases}$

on résout alors le système $\begin{cases} 3-2t=0 \rightarrow t = \frac{3}{2} \\ -1 = t' \rightarrow t' = -1 \\ 2-6t = 0 \rightarrow t = \frac{1}{3} \end{cases}$ → impossible

Donc les droites ne sont pas sécantes.
Et comme elles ne sont pas parallèles alors elles sont non coplanaires.

AFFIRMATION 2 → $\boxed{\text{VRAIE}}$

On commence en vérifiant si le point A appartient bien à ce plan.
On calcule $x_A + 3z_A + 3 = 3 + 3\times(-2) + 3 = \boxed{0}$
↳ le point A vérifie bien l'équation de ce plan.
Ensuite, on utilise l'équation cartésienne du plan pour obtenir un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$.
Et on sait que la droite (d) est dirigée par $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$.
On a $\vec{v} = -2\vec{n}$. Les vecteurs sont donc colinéaires.
Donc la droite (d) est bien orthogonale à ce plan qui vérifie bien les deux conditions proposées.

AFFIRMATION 3 → $\boxed{\text{FAUSSE}}$

On commence en cherchant les coordonnées du point C qui appartient à (d) en ayant une abscisse égale à 2
↳ cela va nous fournir la valeur du paramètre t.

En effet, on a
$$\begin{cases} x = 3 - 2t = \boxed{2} \rightarrow t = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \\ y = \boxed{-1} \\ z = 2 - 6t \rightarrow z = 2 - 6 \times \frac{1}{2} = \boxed{-1} \end{cases}$$

Donc les coordonnées du point C sont $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-3 \\ -4-(-3) \\ -1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2-3 \\ -1-(-3) \\ -1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

et on en déduit $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = \boxed{-3}$.

Or, on sait aussi que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

On calcule $AB = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

et $AC = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

On a donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \cos(\widehat{BAC})$

soit $-3 = 6 \times \cos(\widehat{BAC})$

soit $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{3}{6} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

or on a $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq -\frac{1}{2}$.

AFFIRMATION 4 → $\boxed{\text{VRAIE}}$

On peut ici directement la formule qui nous donne la distance du point B au plan P car cette distance correspond bien à la distance BH.

On a $BH = \dfrac{|a x_B + b y_B + c z_B + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

en utilisant l'équation de P : $\overset{a}{1}x + \overset{c}{3}z \overset{d}{-7} = 0$

et on a $b = 0$.

On obtient : $BH = \dfrac{|1\times5+0\times(-4)+3\times(-1)-7|}{\sqrt{1^2+0^2+3^2}}$

soit $BH = \dfrac{|-5|}{\sqrt{10}} = \boxed{\dfrac{5}{\sqrt{10}}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$

Mais il y a heureusement une autre méthode pour ceux qui ne connaissent pas cette formule.

On peut chercher les coordonnées du point H.

Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ doit être colinéaire au vecteur normal du plan P, qui aura pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$.

On a donc $\overrightarrow{BH} = k\times\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ soit $\begin{cases}x_H-5=k\times1\\y_H-(-4)=k\times0\\z_H-(-1)=k\times3\end{cases}$

↳ on en déduit $\begin{cases}x_H=5+k\\y_H=-4\\z_H=-1+3k\end{cases}$

et le point H appartient au plan P

donc on aura $x_H+3z_H-7=0$

soit $5+k+3(-1+3k)-7=0$

soit $10k=5 \longrightarrow \boxed{k}=\dfrac{5}{10}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$

On en déduit H $\begin{cases}x_H=5+\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{2}\\y_H=-4\\z_H=-1+3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

et on peut calculer $BH=\sqrt{(x_H-x_B)^2+(y_H-y_B)^2+(z_H-z_B)^2}$

soit $BH=\sqrt{\left(\dfrac{11}{2}-5\right)^2+(-4-(-4))^2+\left(\dfrac{1}{2}-(-1)\right)^2}$

et on obtient bien $BH=\boxed{\dfrac{\sqrt{10}}{2}}$

<u>Bilan</u> : il peut être très intéressant d'apprendre la formule qui donne la distance entre un point et un plan !!