Exercice 2

1) on a $U_1 = \dfrac{2\times U_0 + 1}{U_0 + 2} = \dfrac{2\times 2 + 1}{2+2} = \boxed{\dfrac{5}{4}}$

2) a) on a $a_0 = \dfrac{U_0}{U_0 - 1} = \dfrac{2}{2-1} = \boxed{2}$

et $a_1 = \dfrac{U_1}{U_1 - 1} = \dfrac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4} - 1} = \boxed{5}$

b) on a $a_{n+1} = \dfrac{U_{n+1}}{U_{n+1} - 1} = \dfrac{\frac{2U_n + 1}{U_n + 2}}{\frac{2U_n + 1}{U_n + 2} - 1} = \dfrac{\frac{2U_n + 1}{U_n + 2}}{\frac{2U_n + 1 - U_n - 2}{U_n + 2}}$

et en simplifiant par $U_n + 2$, on a $a_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{U_n - 1}$

On calcule alors $3a_n - 1 = 3\times \dfrac{U_n}{U_n - 1} - 1 = \dfrac{3U_n - (U_n - 1)}{U_n - 1} = \dfrac{2U_n + 1}{U_n - 1}$

et donc on a bien $a_{n+1} = 3a_n - 1$ pour tout n

c) <u>Initialisation</u> : elle doit se faire ici pour $n = 1$.

on a $a_1 = 5$ et $3\times 1 - 1 = 2$ donc on a bien $a_1 \geq 3\times 1 - 1$

Ĺ l'inégalité proposée est vérifiée au rang 1.

<u>Hérédité</u> : on suppose l'inégalité vraie pour n soit $a_n \geq 3n - 1$

et montrons qu'elle reste vraie au rang $(n+1)$.

On veut donc montrer $a_{n+1} \geq 3(n+1) - 1$ soit $a_{n+1} \geq 3n + 2$

On part alors de $a_n \geq 3n - 1$

et on obtient $3a_n \geq 3(3n - 1)$

et donc $3a_n - 1 \geq 3(3n-1) - 1$

soit $a_{n+1} \geq 9n - 4$

Il nous reste à vérifier que, pour $n \geq 1$, on a $9n - 4 \geq 3n + 2$.

On calcule $9n - 4 - (3n+2) = 6n - 6 = 6(n-1) \geq 0$ pour $n \geq 1$

On obtient donc : $a_{n+1} \geq 9n - 4 \geq 3n + 2$

et c'est bien l'inégalité qu'il fallait obtenir.

Avec le principe de récurrence, on a bien $a_n \geq 3n - 1$

pour tout $n \geq 1$.

d) on a $\lim_{n \to +\infty} (3n-1) = +\infty$ et, avec le théorème de comparaison, puisque $a_n \geq 3n-1$, on a $\lim_{n \to +\infty} a_n = \boxed{+\infty}$

3) a) on a $a_n = \dfrac{U_n}{U_n - 1}$ soit $a_n(U_n - 1) = U_n$

on obtient donc $a_n U_n - a_n = U_n$

soit $a_n U_n - U_n = a_n$

soit $U_n(a_n - 1) = a_n \to U_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$.

⚠ il faut juste vérifier que l'on peut bien diviser par $a_n - 1$ c'est à dire que $a_n \neq 1$ pour tout n.

or on a $\underbrace{a_0 = 2}_{\neq 1}$ et, pour $n \geq 1$, $a_n \geq 3n - 1 > 1$ donc $\neq 1$

b) on a $U_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$ avec $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$:

On a donc ici une forme indéterminée et on va donc factoriser par a_n → on a $U_n = \dfrac{\cancel{a_n} 1}{\cancel{a_n}(1 - \frac{1}{a_n})} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{a_n}}$ $\frac{1}{a_n}$ tend vers 0

↳ on obtient donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = \boxed{1}$

4) a) (U_n) est donc une suite décroissante qui converge vers 1.
Cette fonction algo(p) nous permet, pour une valeur de p donnée, de connaître le rang n (et la valeur de U_n correspondante) à partir duquel l'écart entre les termes de la suite et 1 devient inférieur ou égal à p.

b) on cherche n à partir duquel on a $U_n - 1 \leq 0{,}001$.

↳ on a $U_5 \simeq 1{,}0027 \to U_5 - 1 > 0{,}001$

et $U_6 \simeq 1{,}0009 \to U_6 - 1 \leq 0{,}001$

Donc la valeur cherchée est $\boxed{n = 6}$.