

Bac Spé Maths 2023
Voici la correction complète
de l'épreuve 1
pour Métropole Antilles Guyane
Lundi 20 Mars 2023

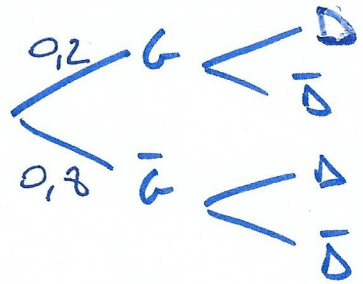
Correction proposée par
Bruno Swiners
sur
www.coursmathsaix.fr

Exercice 1 / c'est le QCM.

Les bonnes réponses sont :

- 1 $\rightarrow$ B
- 2 $\rightarrow$ B
- 3 $\rightarrow$ B
- 4 $\rightarrow$ B
- 5 $\rightarrow$ C

Voici quelques explications même si elles ne sont pas demandées.
pour les questions 1, 2 et 3, on va s'aider de l'arbre :



et on nous donne

$$p(D \cap G) = 0,2\% = \boxed{0,002}$$

$$\text{et } p(D) = 2,2\% = \boxed{0,022}$$

Question 1 : on cherche $p_G(D) = \frac{p(D \cap G)}{p(G)} = \frac{0,002}{0,2} = 0,01 \rightarrow \boxed{B}$

Question 2 : on cherche $p(\bar{G} \cap D)$

$\rightarrow$ on utilise la formule des probabilités totales

$$p(D) = p(G \cap D) + p(\bar{G} \cap D)$$

et donc $\underbrace{p(\bar{G} \cap D)}_{0,082} = \underbrace{p(D)}_{0,022} - 0,002 = 0,08 \rightarrow \boxed{B}$

Question 3 : on cherche $p_D(G) = \frac{p(D \cap G)}{p(D)} = \frac{0,002}{0,022} \approx 0,024 \rightarrow \boxed{B}$

pour la question 4, on prend $n=50$

on calcule $p(X > 2) = 1 - p(X \leq 2) \approx 0,789 \rightarrow \boxed{B}$

Question 5 : la variable X représente le nombre de machines défectueuses $\rightarrow$ on veut que toutes les machines fonctionnent et donc aucune défectueuse $\rightarrow$ on veut $p(X=0) > 0,4$ et, en testant les valeurs proposées, cela est vérifié jusqu'à $n=10 \rightarrow \boxed{C}$

Exercice 2

① on a $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 2 \ln x = \boxed{+\infty}$
 $0 \uparrow$
 $-(-\infty) \rightarrow +\infty$

② avec les croissances comparées, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$
 et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - 2 \frac{\ln x}{x^2} \right) = \boxed{+\infty}$
 $+\infty$
 $\frac{0}{+\infty} \rightarrow 0$
 $\downarrow$
 $\frac{+\infty}{1} \rightarrow +\infty$

③ on a $f(x) = x^2 - 2 \ln x$
 $\hookrightarrow f'(x) = 2x - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \boxed{\frac{2(x^2 - 1)}{x}}$

④ $x^2 - 4$ est un trinôme qui s'annule en -2 et en 2
 (mais, attention, -2 ne sera pas dans le tableau)

$\hookrightarrow$ on obtient

x	0	2	$+\infty$
$x^2 - 4$	$-$	0	$+$
x	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$+$	$+\infty$

$f(2) = 2^2 - 2 \ln 2 = 4 - 2 \ln 2 \approx -1,5$

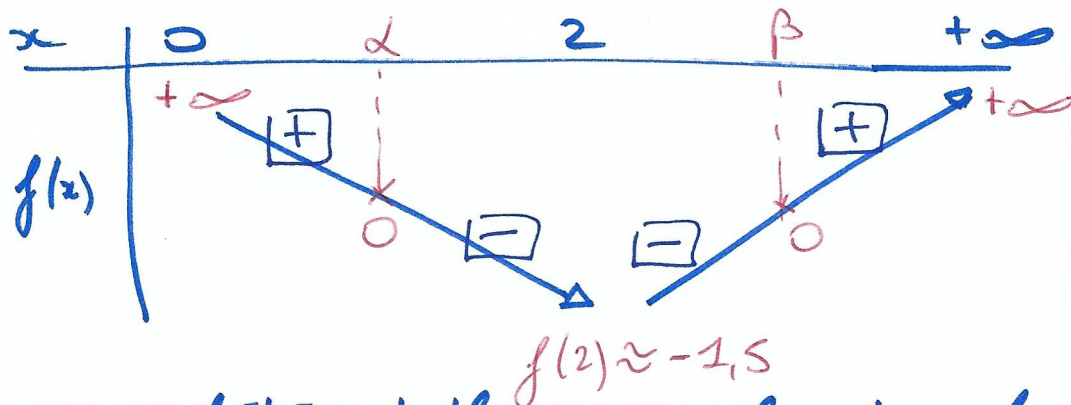
⑤ f est continue et strictement croissante sur $]0; 2]$

on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \boxed{+\infty}$

et $f(2) \approx \boxed{-1,5} < 0$

$\hookrightarrow$ Le nombre 0 appartient bien à l'intervalle image $[f(2); +\infty[$
 et, en appliquant le corollaire du TVI, on montre que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique sur $]0; 2]$.

[6] avec $\alpha \in]0; 2]$ et $\beta \in [2; +\infty[$,
on obtient le tableau de variations suivant :



→ on a complété ce tableau avec les signes de f et
on en déduit :

x	0	α	2	β	$+\infty$
signes de $f(x)$	+	0	-	0	+

[7] on veut $g_h(x) \geq 0$

$$\text{soit } x^2 - 2px + h \geq 0$$

$$\text{soit } x^2 - 2px \geq -h$$

$$\text{c'est à dire } f(x) \geq -h.$$

or, on a, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) \geq f(2)$

Donc on prendra $-h = f(2)$

$$\text{soit } \boxed{h = -f(2)}$$

Exercice 3

Partie A

① on a $U_2 = 0,9 \times U_1 + 1,3 = 0,9 \times 3 + 1,3 = \boxed{4}$
et $U_3 = 0,9 \times U_2 + 1,3 = 0,9 \times 4 + 1,3 = \boxed{4,9}$

② Init : on a $U_1 = \boxed{3}$

et on calcule $U_2 = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^1 = 13 - 10 = \boxed{3}$ OK

Hérédité : on suppose $U_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$

on obtient $U_{n+1} = 0,9 U_n + 1,3$

$$\begin{aligned} &= 0,9 \times \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n \right) + 1,3 \\ &= 0,9 \times 13 - \frac{100}{9} \times \underbrace{0,9 \times 0,9^n}_{\text{bien regroupé comme cela pour faire apparaître } 0,9^{n+1}} + 1,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow U_{n+1} &= 11,7 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} + 1,3 \\ &= 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} \quad \boxed{\text{OK}} \end{aligned}$$

③ on calcule $U_{n+1} - U_n = \cancel{13} - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} - \left(\cancel{13} - \frac{100}{9} \times 0,9^n \right)$

$$\begin{aligned} &= -\frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} + \frac{100}{9} \times 0,9^n \\ &= \frac{100}{9} \times 0,9^n \underbrace{(-0,9 + 1)}_{(0,1)} > 0 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ on a $U_{n+1} - U_n > 0$

Donc la suite (U_n) est croissante.

④ on obtient $\boxed{n = 9}$

$\hookrightarrow$ à partir du 9^e mois, le nombre de questions dépassera $9,5 (\times 100) = 950$ questions !!

Partie B

① on a $V_1 = 9 - 6 \times e^{-0,15(1-1)} = 9 - 6 \times e^0 = 9 - 6 \times 1 = \boxed{3}$

et $V_2 = 9 - 6 \times e^{-0,15(2-1)} = 9 - 6 \times e^{-0,15} \approx \boxed{4,04}$

[2] on résout $V_n > 8,5$

$$\text{soit } 9 - 6 \times e^{-0,19(n-1)} > 8,5$$

$$\text{soit } -6e^{-0,19(n-1)} > -0,5$$

$$\text{soit } e^{-0,19(n-1)} < \frac{0,5}{6}$$

on a divisé par (-6) qui est négatif donc inversion de l'inégalité et $\frac{-0,5}{-6} = \frac{0,5}{6}$

$$\text{on obtient: } \ln e^{-0,19(n-1)} < \ln\left(\frac{0,5}{6}\right)$$

$$\rightarrow -0,19(n-1) < \ln\left(\frac{0,5}{6}\right) \rightarrow n-1 > \frac{\ln\left(\frac{0,5}{6}\right)}{-0,19}$$

$$\text{c'est à dire } n > \frac{\ln\left(\frac{0,5}{6}\right)}{-0,19} + 1 \approx 14,08$$

nouvelle inversion !!

$\rightarrow$ donc on prend $n = 15$ ici !

Partie C

[1] 350 questions, cela correspond à chercher quand les termes des suites (U_n) et (V_n) dépassent 8,5

$\rightarrow$ pour (U_n) , on a obtenu à partir du rang 9

et pour (V_n) , on a obtenu à partir du rang 15

Donc le plus tôt sera pour (U_n) de la partie A ($9 < 15$!)

[2] à long terme $\rightarrow$ on calcule les limites en $+\infty$

modèle A

$$13 - \frac{100}{9} \times (0,9)^n$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$
car $-1 < 0,9 < 1$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \boxed{13}$$

modèle B

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -0,19(n-1) = -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-0,19(n-1)} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 9 - 6e^{-0,19(n-1)} = 9$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \boxed{9}$$

Donc, le plus grand nombre de questions correspond à la suite (U_n) du modèle A.

Exercice 4

① on a $E\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subset \left(\frac{2}{3}\right)$ et $G\left(\frac{2}{3}\right)$

② le vecteur directeur $\vec{EC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-0=1 \\ 1-0=1 \\ 0-1=-1 \end{pmatrix}$

→ on obtient (EC) $\begin{cases} x = \boxed{0} + h \times \boxed{1} = h \\ y = \boxed{0} + h \times \boxed{1} = h \\ z = \boxed{1} + h \times \boxed{-1} = 1-h \end{cases}$
point E $\cdot \vec{EC}$

③ on montre que $\vec{EC}$ est $\perp$ à deux vecteurs de (GBD)

→ on a B $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et D $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ soit $\vec{GB} \begin{pmatrix} 1-1=0 \\ 0-1=-1 \\ 0-1=-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{GD} \begin{pmatrix} 0-1=-1 \\ 1-1=0 \\ 0-1=-1 \end{pmatrix}$

on calcule $\vec{EC} \cdot \vec{GB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) = 0$

et $\vec{EC} \cdot \vec{GD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + (-1) \times (-1) = 0$

Donc on a bien $\vec{EC} \cdot \vec{GB} = 0$ soit $\vec{EC} \perp \vec{GB}$
et $\vec{EC} \cdot \vec{GD} = 0$ soit $\vec{EC} \perp \vec{GD}$.

④ a) $\vec{EC}$ sera un vecteur normal au plan (GBD)

→ ses coordonnées sont $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans $ax+by+cz+d=0$!

on obtient: $1x+1y+(-1)z+d=0 \rightarrow \boxed{x+y-z+d=0}$

or $G \in (GBD)$ donc $\underset{x_G}{1} + \underset{y_G}{1} - \underset{z_G}{1} + d = 0 \rightarrow 1+d=0 \rightarrow d=-1$

→ on obtient bien l'équation $\boxed{x+y-z-1=0}$

b) on cherche l'intersection entre une droite et un plan

→ on "met" la droite (EC) dans le plan (GBD).

on obtient: $h+h-(1-h)-1=0$

soit $h+h-1+h-1=0 \rightarrow 3h-2=0 \rightarrow h=\frac{2}{3}$

et on obtient le point $\pi \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$

c) on calcule $EI = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2}$

$\rightarrow EI = \sqrt{\frac{12}{9}} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

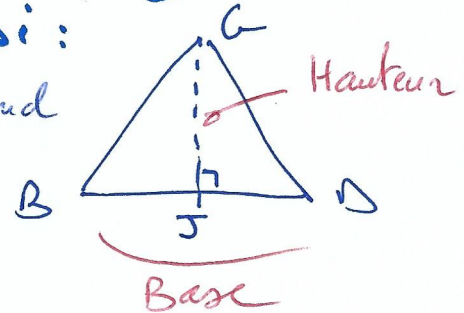
5) a) on a bien $BD = DG = GB$ car les 3 longueurs sont, toutes les 3, la diagonale d'un carré de côté 1.

$\rightarrow$ pour information, on a $BD = DG = GB = \boxed{\sqrt{2}}$

b) Le point J aura pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

et le triangle BGD se présente ainsi :

⚠ la hauteur issue du point G correspond bien à la médiane, à la médiatrice...



on a : Aire BGD = $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$

$\rightarrow \text{Aire BGD} = \frac{BD \times GJ}{2}$
 $= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{3}{2}}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

avec $BD = \sqrt{2}$
 et $GJ = \sqrt{(0,5-1)^2 + (0,5-1)^2 + (0-1)^2}$
 $= \sqrt{\frac{3}{2}}$

6) on a donc : $\text{Volume}_{\text{EGBD}} = \frac{1}{3} \times \underbrace{\text{Aire BGD}}_{\text{Base de EGBD}} \times \underbrace{EI}_{\text{Hauteur associée.}}$

$\rightarrow$ on obtient le volume égal à :

$\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$