Exercice 4

Partie 1

[1] on va montrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, non colinéaires, du plan (ABC).

on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0-3 \\ 2-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-0 \\ 2-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

et on calcule $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\times 2 + 2\times 3 + 0\times 3 = \boxed{0}$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3\times 2 + 0\times 3 + 2\times 3 = \boxed{0}$$

Donc on a bien $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$ et $\overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$.

Donc $\vec{n}$ est bien un vecteur normal au plan (ABC)

[2] Les coordonnées de $\vec{n}$ seront donc les coefficients a, b et c de l'équation cartésienne du plan (ABC).

on obtient donc : $2x + 3y + 3z + d = 0$

or on $A \in (ABC) \rightarrow 2\times \underset{x_A}{3} + 3\times \underset{y_A}{0} + 3\times \underset{z_A}{0} + d = 0 \rightarrow 6 + d = 0$

$\rightarrow d = -6$

on obtient, pour le plan (ABC), l'équation $2x + 3y + 3z - 6 = 0$

[3] on aura pour la droite (d) $\begin{cases} x = \boxed{0} + \boxed{2}\times t \\ y = \boxed{0} + \boxed{3}\times t \\ z = \boxed{0} + \boxed{3}\times t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases}$

point O vecteur directeur $\vec{n}$

[4] on remplace, dans l'équation du plan (ABC), les x, y et z par leur expression de la représentation paramétrique de (d).

on obtient : $2\times(2t) + 3\times(3t) + 3\times(3t) - 6 = 0$

soit $4t + 9t + 9t - 6 = 0 \rightarrow 22t = 6 \rightarrow t = \frac{3}{11}$

et on obtient les coordonnées du point H

$$\rightarrow H\begin{pmatrix} x = 2\times\frac{3}{11} = \frac{6}{11} \\ y = 3\times\frac{3}{11} = \frac{9}{11} \\ z = 3\times\frac{3}{11} = \frac{9}{11} \end{pmatrix}$$

[5] La distance cherchée correspond donc à la distance OH.

on a $OH = \sqrt{(x_H - x_O)^2 + (y_H - y_O)^2 + (z_H - z_O)^2}$

soit $OH = \sqrt{\left(\frac{6}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2 + \left(\frac{9}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{198}{121}} = \frac{3\sqrt{22}}{11}$

Partie 2

[1] on prend le triangle OAB comme base (triangle rectangle) et la hauteur associée sera OC

on a donc $V_{OABC} = \frac{1}{3} \times Aire_{OAB} \times OC = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\overset{OA}{3} \times \overset{OB}{2}}{2}\right) \times 2 = \boxed{2}$

[2] on va exprimer ce volume en prenant ABC comme base et la hauteur associée sera donc OH.

on a donc $V_{OABC} = 2 = \frac{1}{3} \times Aire_{ABC} \times OH$

soit $2 = \frac{1}{\cancel{3}} \times Aire_{ABC} \times \frac{\cancel{3}\sqrt{22}}{11}$.

soit $Aire_{ABC} = 2 \times \frac{11}{\sqrt{22}} = \frac{22}{\sqrt{22}} = \boxed{\sqrt{22}}$

[3] on a donc $(Aire_{ABC})^2 = (\sqrt{22})^2 = \boxed{22}$

et on a $(Aire_{OAB})^2 + (Aire_{OBC})^2 + (Aire_{OAC})^2$

$= \left(\frac{OA \times OB}{2}\right)^2 + \left(\frac{OB \times OC}{2}\right)^2 + \left(\frac{OA \times OC}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{3 \times 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{3 \times 2}{2}\right)^2$

$= 3^2 + 2^2 + 3^2 = \boxed{22}$

d'où le résultat qu'il fallait démontrer.