Exercice 3

Partie 1

1 on a $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2-4) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

et, par produit, on a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

mais, en $+\infty$, on aura une forme indéterminée.

On écrit alors $f(x) = x^2 e^{-x} - 4e^{-x}$

avec $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ avec les croissances comparées

et $\lim\limits_{x \to +\infty} 4e^{-x} = 0$

et, par différence, on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{0}$

2 on aura $f'(x) = \underbrace{2x \times e^{-x}}_{u' \times v} + \underbrace{(x^2-4) \times (-e^{-x})}_{u \times v'}$

soit $f'(x) = 2x e^{-x} - (x^2-4)e^{-x}$

$= e^{-x}(2x - x^2 + 4) = (-x^2 + 2x + 4)e^{-x}$.

3 on aura $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc le signe de f' ne dépend que du signe du trinôme.

→ on calcule $\Delta = (2)^2 - 4 \times (-1) \times 4 = 20 > 0$

→ les deux racines sont : $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{20}}{-2} = 1 + \sqrt{5}$

et $x_2 = 1 - \sqrt{5}$

on en déduit :

signe du trinôme dont le coefficient a est négatif.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	$+\infty$	↘	$f(1-\sqrt{5}) \approx -8{,}5$	↗	$f(1+\sqrt{5}) \approx 0{,}25$	↘	0

Partie 2

1 on a $I_0 = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^0 e^{-x}\,dx = \int_{-2}^{0} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{-2}^{0} = -e^{-0} - (-e^{-(-2)})$

soit $I_0 = -1 + e^2 = e^2 - 1$.

2) on a $I_{n+1} = \int_{-2}^{0} \underbrace{x^{n+1}}_{u} \times \underbrace{e^{-x}}_{v'} dx$

↳ on utilise une intégration par parties avec :

$u(x) = x^{n+1} \longrightarrow u'(x) = (n+1)x^{n}$

$v'(x) = e^{-x} \longrightarrow v(x) = -e^{-x}$

On obtient $I_{n+1} = \left[\underbrace{x^{n+1}}_{u} \times \underbrace{(-e^{-x})}_{v}\right]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} \underbrace{(n+1)x^{n}}_{u'} \times \underbrace{(-e^{-x})}_{v} dx$

soit $I_{n+1} = 0 - (-2)^{n+1}(-e^{-(-2)}) + (n+1)\int_{-2}^{0} x^{n} e^{-x} dx$

↳ $I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^{2} + (n+1) I_{n}$.

3) on a donc $I_1 = (-2)^{0+1} e^{2} + (0+1) I_0 = -2e^{2} + (e^{2} - 1)$

$\longrightarrow \boxed{I_1 = -e^{2} - 1}$

et on a $I_2 = (-2)^{1+1} e^{2} + (1+1) I_1 = 4e^{2} + 2(-e^{2} - 1)$

$\longrightarrow \boxed{I_2 = 2e^{2} - 2}$

Partie 3

1) on a $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc le signe de $f(x)$ ne dépend que du signe de $(x^2 - 4)$.

une étude rapide nous donne

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) La fonction f est négative sur l'intervalle $[-2;0]$.

On aura donc $S = -\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = -\int_{-2}^{0} (x^2 - 4)e^{-x} dx$

on en déduit $S = -\int_{-2}^{0} x^2 e^{-x} dx + 4\int_{-2}^{0} e^{-x} dx$ on utilise la linéarité des intégrales.

↳ $S = -I_2 + 4\left[-e^{-x}\right]_{-2}^{0} = -I_2 + 4(-e^{0} - (-e^{-(-2)}))$

↳ $S = -I_2 + 4(e^{2} - 1) = -(2e^{2} - 2) + 4e^{2} - 4$

et on obtient $S = \boxed{2e^{2} - 2}$ u.a.